



ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR - TE 141599

**DESAIN KONTROL OPTIMAL *FUZZY*
MENGUNAKAN PENDEKATAN PDC MODIFIKASI
UNTUK SISTEM PENDULUM KERETA**

Syfa Almira
NRP 2212 106 009

Dosen Pembimbing
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

JURUSAN TEKNIK ELEKTRO
Fakultas Teknologi Industri
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2015



ITS
Institut
Teknologi
Sepuluh Nopember

FINAL PROJECT - TE 141599

**FUZZY OPTIMAL CONTROL DESIGN
USING PDC MODIFICATION APPROACH
OF A PENDULUM CART SYSTEM**

Syfa Almira
NRP 2212 106 009

Advisor
Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTMENT
Faculty of Industrial Technology
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2015


**DESAIN KONTROL OPTIMAL FUZZY
MENGUNAKAN PENDEKATAN PDC MODIFIKASI UNTUK
SISTEM PENDULUM KERETA**

TUGAS AKHIR

**Diajukan Guna Memenuhi Sebagian Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik
Pada
Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan
Jurusan Teknik Elektro
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

Menyetujui :

Dosen Pembimbing,



Dr. Trihastuti Agustinah ST., MT.

NIP : 1968 08 12 1994 03 2001



DESAIN KONTROL OPTIMAL FUZZY MENGUNAKAN PENDEKATAN PDC MODIFIKASI UNTUK SISTEM PENDULUM KERETA

Nama : Syfa Almira

Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRAK

Sistem pendulum kereta merupakan salah satu contoh sistem yang memiliki karakteristik nonlinear dan tidak stabil, sehingga sering digunakan untuk menguji metode-metode kontrol. Pada Tugas Akhir ini akan dibahas mengenai desain sistem kontrol stabilitas pada sistem pendulum kereta dengan metode kontrol *fuzzy* optimal agar sistem pendulum kereta mampu menstabilkan pendulum pada posisi terbaliknya serta menjaga kereta pada titik tengah rel. Desain kontroler *fuzzy* berbasis *Takagi-Sugeno* (T-S) dirancang dengan menggunakan konsep PDC modifikasi. *State feedback gain* diperoleh dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) berdasarkan kombinasi matrik Q dan R sehingga diperoleh nilai K yang diinginkan. Hasil simulasi dan implementasi menunjukkan bahwa kontroler dapat mempertahankan pendulum pada keadaan terbaliknya dan posisi kereta kembali pada titik tengah rel dengan cepat.

Kata Kunci : *Fuzzy Takagi-Sugeno, Linear Quadratic Regulator (LQR)*
PDC Modifikasi, Sistem Pendulum Kereta.

Halaman ini sengaja dikosongkan

OPTIMAL FUZZY CONTROL DESIGN USING PDC MODIFICATION APPROACH OF A PENDULUM CART SYSTEM

Name : Syfa Almira
Advisor : Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T.

ABSTRACT

Pendulum cart system is an example of nonlinear and unstable system, which is often used to test the performance of control methods. This final project discuss about control stability system design on the pendulum cart system with Fuzzy-Optimal Control method to make the pendulum cart system were able to stabilize the pendulum at the inverted state and maintain the cart at the center of the rail. Takagi-Sugeno fuzzy controller is designed using the concept of PDC modification. The state feedback gain is obtained using the Linear Quadratic Regulator method (LQR) based on the combination of matrices Q and R in order to obtain the desired K value. Simulation and implementation results show that the controller can maintain the pendulum at its inverted position and bring back the cart at the center of the rail quickly.

Keywords : Takagi-Sugeno Fuzzy, Linear Quadratic Regulator (LQR), PDC Modification, Pendulum Cart System.

Halaman ini sengaja dikosongkan

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang selalu memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam semoga selalu dilimpahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, keluarga, sahabat, dan umat muslim yang senantiasa meneladani beliau. Tugas Akhir ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna menyelesaikan pendidikan Strata-I pada Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan, Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknologi Industri, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan judul:

DESAIN KONTROL OPTIMAL *FUZZY* MENGUNAKAN PENDEKATAN PDC MODIFIKASI UNTUK SISTEM PENDULUM KERETA

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Lila Sukmala, Achmad Hasan, serta Fahmi Alghifari selaku orang tua dan adik penulis yang telah memberikan berbagai bentuk doa, semangat serta dukungan tulus tiada henti, Ibu Dr. Trihastuti Agustinah, ST. MT. atas segala bimbingan ilmu, moral, dan spiritual dari awal hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini, Nani Nur'aini Awab Putri sebagai teman seperjuangan, teman begadang saat *deadline* dan teman diskusi dalam pengerjaan Tugas Akhir ini, Mas Andri Ashfahani untuk seluruh ilmu dan waktu yang diberikan kepada penulis dan rekan, Tim Robot *Manipulator* (Septian Surya, Duli Ridlo, dan Ikhsan Eka) selaku teman bimbingan dan *sharing*, keluarga Sistem Pengaturan Lintas Jalur 2012 Genap yang selalu membuat suasana kelas hangat, seluruh teman-teman Lintas Jalur, serta berbagai pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu demi satu. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam tugas akhir ini. Kritik dan saran untuk perbaikan tugas akhir ini sangat diperlukan. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

Surabaya, Januari 2015

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERNYATAAN KEASLIAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
 BAB 1 PENDAHULUAN	 1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Metodologi	2
1.5 Sistematika Pembahasan	3
1.6 Relevansi	4
 BAB II TEORI PENUNJANG	 5
2.1 Tinjauan Pustaka	5
2.2 Sistem Pendulum Kereta	6
2.2.1 Model Fisik Sistem Pendulum Kereta	8
2.2.2 Model Matematika Sistem Pendulum Kereta	8
2.3 Linearisasi	11
2.4 Teori Logika <i>Fuzzy</i>	14
2.4.1 Himpunan <i>Fuzzy</i>	14
2.4.2 Operasi Himpunan <i>Fuzzy</i>	19
2.4.3 Sistem Inferensi <i>Fuzzy</i>	21
2.5 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	26
2.6 <i>Parallel Distributed Compensation</i> (PDC) Modifikasi	29
2.7 <i>Linear Quadratic Regulator</i> (LQR)	32
 BAB III PERANCANGAN SISTEM	 35
3.1 Linearisasi Model Matematika Sistem Pendulum Kereta	35
3.2 Pemodelan <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	39
3.3 Perancangan Kontroler <i>Fuzzy</i> PDC Modifikasi	41

3.4	Perhitungan <i>State Feedback Gain</i> dengan <i>Linear Quadratic Regulator</i> (LQR)	43
3.4.1	Kombinasi Q dan R	44
3.4.2	Mendapatkan Solusi Kontrol Optimal	44
3.5	Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi	48
BAB IV HASIL SIMULASI DAN IMPLEMENTASI		51
4.1	Variabel dan Parameter yang Digunakan	51
4.2	Hasil Simulasi	56
4.2.1	Hasil Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal.....	56
4.2.2	Hasil Simulasi Perbandingan Sudut Awal Pendulum dengan Simpangan Posisi Kereta	59
4.2.3	Hasil Simulasi dengan Gangguan	60
4.2.4	Hasil Simulasi Perbandingan PDC Modifikasi dengan PDC Konvensional	64
4.3	Hasil Implementasi.....	67
4.3.1	Hasil Implementasi Berbagai Kondisi Awal	67
4.3.2	Hasil Implementasi dengan Gangguan	69
BAB V PENUTUP		73
DAFTAR PUSTAKA		75
LAMPIRAN A		77
A.1	Penurunan Persamaan <i>State</i> Sistem Pendulum-Kereta	77
A.2	Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum-Kereta	81
LAMPIRAN B		85
B.1	Program Perhitungan <i>Gain</i> Kontroler	85
B.2	Blok Diagram Simulink.....	87
RIWAYAT HIDUP.....		91

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Parameter-parameter Sistem Pendulum Kereta	11
Tabel 4.1	Kombinasi Matriks Q dan R pada 3 Percobaan	52
Tabel 4.2	Hasil <i>State Feedback Gain</i> pada 3 Percobaan	52
Tabel 4.3	Perbandingan Nilai Respon Sudut Pendulum 3 Percobaan.....	53
Tabel 4.4	Perbandingan Nilai Respon Posisi Kereta 3 Percobaan....	55
Tabel 4.5	Perbandingan Nilai Sinyal Kontrol 3 Percobaan	55
Tabel 4.6	Perbandingan Nilai Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal.....	57
Tabel 4.7	Perbandingan Nilai Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal.....	58
Tabel 4.8	Perbandingan Nilai Sinyal Kontrol dengan Berbagai Kondisi Awal.....	58
Tabel 4.9	Perbandingan Nilai antara Sudut Awal Pendulum dengan Besar Simpangan Posisi Kereta.....	60
Tabel 4.10	Perbandingan Nilai Respon Simulasi saat Gangguan	63
Tabel 4.11	Perbandingan Nilai antara PDC Konvensional dan PDC Modifikasi.....	66
Tabel 4.12	Perbandingan Nilai Respon Implementasi saat Gangguan.....	72

Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Perangkat Kontrol Sistem pendulum kereta	6
Gambar 2.2	Bagian Mekanik dan Tata Letak Sensor SPK.....	7
Gambar 2.3	Model Fisik Sistem Pendulum Kereta	8
Gambar 2.4	Gaya pada Sistem pendulum kereta.....	9
Gambar 2.5	(a) Gaya Translasi terhadap Sumbu x ; (b) Gaya Translasi	9
Gambar 2.6	Linearisasi $y = f(x)$ pada Sekitar x^*	12
Gambar 2.7	Himpunan Fuzzy dan Derajat Keanggotaanya	15
Gambar 2.8	Fungsi Keanggotaan Segitiga	16
Gambar 2.9	Fungsi Keanggotaan Trapesium	17
Gambar 2.10	Fungsi Keanggotaan <i>Gaussian</i>	18
Gambar 2.11	Fungsi Keanggotaan <i>Generalized Bell</i>	18
Gambar 2.12	Operasi pada Himpunan <i>Fuzzy</i> , (a) Himpunan <i>Fuzzy A</i> dan <i>B</i> , (b) Operasi Komplemen, (c) Operasi <i>Min</i> , (d) Operasi <i>Product</i> , (e) Operasi <i>Max</i> , dan (f) Operasi <i>Algebraic Sum</i>	20
Gambar 2.13	Struktur Dasar Sistem Inferensi <i>Fuzzy</i>	21
Gambar 2.14	Inferensi <i>Fuzzy</i> Mamdani Menggunakan Metode <i>Max-Min</i>	23
Gambar 2.15	Inferensi <i>Fuzzy</i> Mamdani Menggunakan Metode <i>Max-Product</i>	24
Gambar 2.16	Inferensi <i>Fuzzy</i> Sugeno Menggunakan Metode Defuzzifikasi <i>Center (Weighted) Average</i>	25
Gambar 2.17	<i>Fuzzy Singleton</i>	26
Gambar 2.18	Skema PDC	26
Gambar 2.19	Sistem Kontrol Stabilasi <i>Fuzzy</i> Lokal ke- i	28
Gambar 2.20	Struktur Umum dari Metode PDC Modifikasi	30
Gambar 2.21	Fungsi Keanggotaan PDC Modifikasi	30
Gambar 3.1	Fungsi Keanggotaan Aturan Model <i>Plant</i> dan Kontroler	40
Gambar 3.2	Struktur PDC Modifikasi dengan 2 Subsistem.....	41
Gambar 3.3	Fungsi Keanggotaan Sinyal Kontrol.....	42
Gambar 3.4	Diagram Simulink Sistem Kontrol Hasil Desain untuk Simulasi.....	48
Gambar 3.5	Diagram Simulink Sistem Kontrol Hasil Desain untuk Implementasi	49

Gambar 4.1	Respon Sudut pendulum 3 Percobaan Kombinasi Matriks.....	53
Gambar 4.2	Respon Posisi Kereta 3 Percobaan Kombinasi Matriks.....	54
Gambar 4.3	Sinyal Kontrol 3 Percobaan Kombinasi Matriks	54
Gambar 4.4	Respon Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum	56
Gambar 4.5	Respon Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum	57
Gambar 4.6	Sinyal Kontrol pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum.....	58
Gambar 4.7	Respon Perbandingan antara Sudut Awal Pendulum dengan Besar Simpangan Posisi Kereta.....	59
Gambar 4.8	Gangguan $w(t)$ pada Simulasi.....	61
Gambar 4.9	Respon Sudut Pendulum pada Simulasi dengan Gangguan.....	61
Gambar 4.10	Respon Posisi Kereta pada Simulasi dengan Gangguan.....	62
Gambar 4.11	Sinyal Kontrol pada Simulasi dengan Gangguan.....	63
Gambar 4.12	Respon Sudut Pendulum PDC Modifikasi dan PDC Konvensional	64
Gambar 4.13	Respon Posisi Kereta PDC Modifikasi dan PDC Konvensional	65
Gambar 4.14	Sinyal Kontrol PDC Modifikasi dan PDC Konvensional	66
Gambar 4.15	Respon Sudut Pendulum pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal.....	67
Gambar 4.16	Respon Posisi Kereta pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal.....	68
Gambar 4.17	Sinyal Kontrol pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal	69
Gambar 4.18	Gangguan $w(t)$ pada Implementasi	70
Gambar 4.19	Respon Sudut Pendulum pada Implementasi dengan Gangguan.....	70
Gambar 4.20	Respon Posisi Kereta pada Implementasi dengan Gangguan.....	71
Gambar 4.21	Sinyal Kontrol pada Implementasi dengan Gangguan.....	72

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem Pendulum Kereta (SPK) merupakan salah satu sistem yang nonlinear dan tidak stabil, sehingga sistem ini sering digunakan sebagai pengujian metode-metode kontrol. Permasalahan kontrol yang biasa digunakan pada SPK adalah *swing-up*, stabilisasi dan *tracking*. *Swing-up* adalah mengayunkan pendulum dari posisi menggantung menuju posisi terbalik. Selanjutnya, pendulum dipertahankan pada posisi terbaliknya yang biasa disebut stabilisasi. Stabilisasi merupakan usaha yang dilakukan untuk menjaga posisi batang pendulum tetap berada dalam posisi terbalik serta menjaga pergerakan kereta sekecil mungkin. Sedangkan untuk *tracking*, kereta dikontrol agar bergerak mengikuti sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan pendulum pada posisi terbalik.

Pada Tugas Akhir ini digunakan metode kontrol *fuzzy* optimal yang digunakan untuk menstabilkan pendulum pada sudut 0 radian terhadap garis vertikal dan posisi kereta berada pada titik tengah rel. Posisi terbalik pada SPK merupakan state ekuilibrium yang tidak stabil dari sistem pendulum-kereta. Pada posisi tersebut, pendulum dan kereta cenderung mengalami pergerakan yang berubah-ubah sehingga posisi pendulum tidak berada pada *state* ekuilibrium atau sudut sekitar 0 radian.

Dalam mendesain kontroler stabilisasi untuk sistem nonlinear dapat digunakan skema kontrol pendekatan model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) [1],[4],[5]. Pendekatan model *fuzzy* T-S lebih dipilih karena mampu merepresentasikan perilaku nonlinear sistem dari kombinasi beberapa subsistem linear yang lebih sederhana. Pada [3] menggunakan model *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) yang menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) yang telah dimodifikasi. Letak perbedaan antara aturan PDC konvensional dan PDC modifikasi ada pada tahap pembentukan aturan kontrol. Aturan kontrol pada PDC modifikasi akan dikelompokkan kembali ke dalam range yang telah ditentukan sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan.

Skema kontrol secara keseluruhan akan mengikuti aturan PDC modifikasi, dimana dari masing-masing subsistem dapat dihitung *state feedback gain* yang akan mengompensasi model *fuzzy* T-S yang

bersesuaian. *State feedback gain* akan diperoleh dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah kontrol stabilitas pendulum pada titik ekuilibrium tak stabilnya dengan tetap memperhatikan batasan-batasan pada *plant* nyata serta gangguan dari luar yang diberikan pada sistem. Untuk mengatasi permasalahan ini digunakan desain kontrol optimal *fuzzy* Takagi-Sugeno menggunakan aturan kontroler PDC modifikasi, diharapkan metode ini mampu memberikan respon yang lebih cepat dalam mencapai kestabilan dari PDC konvensional.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang hendak dicapai dalam Tugas Akhir ini adalah merancang kontroler *fuzzy* T-S berbasis PDC Modifikasi dengan metode LQR untuk stabilisasi pendulum pada titik ekuilibrium tak stabilnya. Selanjutnya, kontroler yang telah dirancang diujikan pada *plant* nyata “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200” dengan bantuan *software* Simulink/MATLAB dan *Real Time Workshop-Real Time Windows Target* dengan menggunakan PCI 1711.

1.4 Metodologi

Metodologi yang digunakan dalam penyusunan Tugas Akhir ini antara lain:

1. Studi literatur

Pada tahap studi literatur, dilakukan pencarian bahan pembahasan yang berhubungan dengan judul tugas akhir melalui media elektronik (internet) dan media cetak (buku/*paper*). Beberapa bahasan yang dipelajari meliputi,

- a. Konsep dasar pendulum terbalik
- b. Pemodelan *plant* pendulum kereta
- c. Desain kontrol optimal *fuzzy* dengan konsep PDC modifikasi untuk model *fuzzy* Takagi-Sugeno dan metode LQR

2. Pemodelan Sistem

Dalam tahap pemodelan sistem pada pendulum kereta, hasil yang didapat merupakan hasil identifikasi fisik. Identifikasi fisik

tersebut diperoleh dari gaya yang muncul pada sistem pendulum kereta. Hasil pemodelan berupa persamaan *state space* yang selanjutnya akan digunakan untuk tahap desain kontroler.

3. Perancangan Kontroler dan Simulasi

Setelah didapat hasil pemodelan sistem berupa model matematika dari Sistem Pendulum-Kereta, dirancang kontroler model *fuzzy* T-S dengan menggunakan aturan PDC Modifikasi dan metode LQR untuk mencari *state feedback gain*. Hasil kontroler yang telah dirancang akan disimulasikan menggunakan *software* MATLAB sebelum diimplementasikan ke dalam *real* sistem.

4. Implementasi

Hasil rancangan kontroler yang telah disimulasikan kemudian diimplementasikan pada *plant* “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200” dan hasil yang diharapkan *plant* dapat bekerja sesuai tujuan yang diinginkan yaitu stabil dengan mempertahankan posisi batang pendulum dalam keadaan terbalik.

5. Penulisan Buku Tugas Akhir

Tahap akhir penelitian merupakan tahap penyusunan laporan penelitian, yaitu berupa buku tugas akhir yang terdiri dari pendahuluan, teori penunjang, perancangan sistem kontrol, hasil simulasi dan implementasi, serta penutup.

1.5 Sistematika Pembahasan

Untuk memudahkan pembahasan, maka Tugas Akhir ini akan dibagi menjadi lima bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, sistematika pembahasan, metodologi penelitian, dan relevansi.

BAB II : TEORI PENUNJANG

Bab ini menjelaskan tentang tinjauan pustaka pendahuluan, konsep dasar dari sistem pendulum kereta, teknik linearisasi pada model matematika nonlinear pada sistem pendulum kereta, teori *fuzzy* Takagi-Sugeno, konsep *Parallel Distributed*

Compensation (PDC) Modifikasi dan *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

BAB III : PERANCANGAN SISTEM

Bab ini membahas perancangan simulasi pendulum terbalik dan algoritma kontrol *Linear Quadratic Regulator* dengan konsep PDC modifikasi serta perancangan implementasi.

BAB IV : HASIL SIMULASI DAN IMPLEMENTASI

Bab ini memuat hasil simulasi dan hasil implementasi pada *plant*. Dari respon simulasi dan implementasi akan diperoleh hasil analisa.

BAB V : PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari hasil rancangan dan pengujian yang telah diperoleh.

1.6 Relevansi

Hasil yang diperoleh dari Tugas Akhir ini diharapkan menjadi referensi dalam pengembangan sistem kontrol pada *plant nonlinear inverted pendulum*. Selain itu, untuk mengetahui pengaruh penggunaan metode LQR pada saat digunakan mencari *state feedback gain* dalam membentuk aturan *fuzzy* T-S menggunakan PDC modifikasi.

BAB II TEORI PENUNJANG

Pada bab ini akan dibahas mengenai materi dasar dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Beberapa hal yang akan dibahas meliputi tinjauan pustaka yang akan membahas mengenai sistem pendulum kereta, linearisasi persamaan nonlinear, teori *fuzzy*, model *fuzzy* T-S (Takagi-Sugeno), konsep PDC (*Parallel Distributed Compensation*) modifikasi, dan *Linear Quadratic Regulator*.

2.1 Tinjauan Pustaka

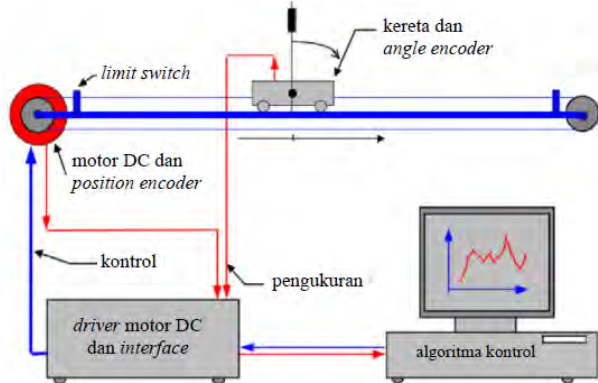
Dalam mendesain kontroler untuk sistem nonlinear dapat digunakan desain kontrol nonlinear melalui pendekatan beberapa subsistem linear menggunakan model *fuzzy* T-S. Pada [5] digunakan pendekatan model *fuzzy* T-S untuk mendesain kontroler *state-feedback* dari masing-masing subsistem linear. Hasil yang didapat menggunakan model *fuzzy* T-S lebih baik dengan perhitungan yang lebih sederhana.

Ketidakpastian parameter serta gangguan sering ditemui pada implementasi nyata sebuah sistem kontrol. Maka digunakan aturan kontrol mengikuti aturan PDC modifikasi [1], dimana dari masing-masing subsistem dapat dihitung *state feedback gain* yang akan mengompensasi model *fuzzy* T-S yang bersesuaian. Dalam perancangan aturan kontrol PDC modifikasi, sinyal kontrol akan dikelompokkan kembali menjadi beberapa kondisi yang telah ditentukan (*high* dan *low*). Sehingga akan lebih spesifik dalam menentukan kondisi sinyal output. Kontroler *fuzzy* dengan performansi PDC modifikasi dapat dirancang dengan menggunakan pendekatan *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk memperoleh *state feedback gain*. Dalam memperoleh *state feedback gain* menggunakan metode LQR, dilakukan dengan mencari kombinasi Q dan R yang sesuai dengan indeks performansi [8].

Pada Tugas Akhir ini skema kontrol yang dirancang adalah *fuzzy* T-S dengan performansi PDC modifikasi untuk perancangan aturan kontrol untuk stabilisasi SPK sesuai dengan [7]. Selain itu, untuk mendapatkan nilai *state feedback gain* pada tiap aturan dilakukan dengan menggunakan metode LQR. Tahapan untuk mencari kombinasi matriks Q dan R dalam mendapatkan *state feedback gain* dilakukan sesuai [8].

2.2 Sistem Pendulum Kereta

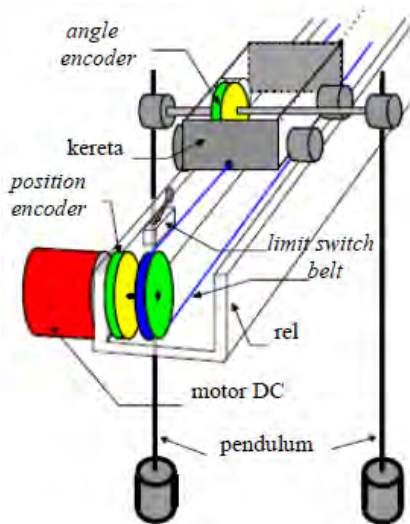
Sistem Pendulum Kereta merupakan modul dari *Feedback Instrumentation*® yang digunakan untuk mendemonstrasikan pengendalian sistem *Single Input Multiple Output* (SIMO). Sistem pendulum kereta terdiri dari sepasang batang pendulum yang terpasang pada sebuah kereta. Pendulum dapat bergerak bebas pada bidang vertikal, sedangkan kereta bergerak pada sisi horizontal. Kereta digerakan oleh motor DC yang dihubungkan dengan *belt*. Untuk mengayunkan dan menyeimbangkan pendulum, kereta digerakan ke kanan atau ke kiri pada rel yang panjangnya terbatas. Sistem Pendulum Kereta secara keseluruhan dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Perangkat Kontrol Sistem pendulum kereta

Posisi kereta pada lintasan dapat dipantau melalui sensor posisi yaitu *position encoder*. *Position encoder* merupakan sensor posisi menggunakan sensor infra-merah untuk membaca putaran cakram (*disk*). Sensor ini dipasang pada sumbu motor DC. Pada cakram terdapat deretan lubang-lubang yang membentuk dua cincin dengan posisi yang berbeda antara cincin yang satu dengan yang lain. Pemancar dan penerima infra-merah diletakkan pada masing-masing sisi cakram, sehingga sinar infra-merah dapat melewati lubang pada saat cakram berputar. Lubang-lubang yang saling berpotongan antar kedua cincin mengakibatkan pembacaan yang berbeda pada setiap arah putaran cakram, sehingga arah perpindahan kereta dapat ditentukan. Sebagai pengaman, digunakan *limit switch* pada masing-masing ujung rel.

Ketika kereta berada pada ujung lintasan, maka *limit switch* tertekan dan motor DC akan mati, sehingga kereta akan berhenti bergerak. Sedangkan sudut batang pendulum terhadap sumbu vertikal yang disebabkan dari gerakan kereta dapat dipantau oleh *angle encoder*. Bagian mekanik dan tata letak sensor Sistem Pendulum Kereta dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Bagian Mekanik dan Tata Letak Sensor SPK

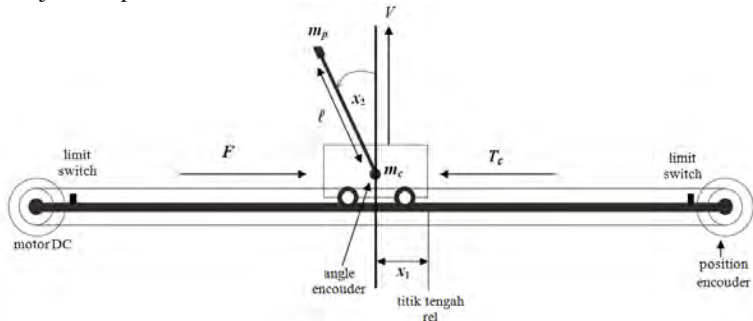
Dalam implementasi, digunakan Sistem Pendulum Kereta dari Feedback Instruments Ltd. dengan tipe “*Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200*”. Penerapan sistem kontrol dilakukan pada komputer dengan bantuan perangkat lunak MATLAB beserta Simulink. Sistem Pendulum Kereta dengan komputer terhubung melalui modul “*Digital Pendulum Controller 33-201*” sebagai kontroler antarmuka, serta *board* akuisisi data (DAQ) sebagai I/O pada komputer. Sinyal kontrol dari komputer keluar melalui *Digital to Analog Converter* (DAC) yang terdapat pada DAQ.

Power amplifier yang terhubung dengan *port* keluaran DAQ akan menerima sinyal kontrol yang kemudian dikirim ke motor DC untuk menggerakkan kereta. Sensor akan membaca sinyal respon motor DC

kemudian diteruskan menuju *encoder*. Sinyal dari *encoder* akan diteruskan menuju komputer melalui ADC pada *board* DAQ.

2.2.1 Model Fisik Sistem Pendulum Kereta

Struktur Sistem Pendulum Kereta dibagi menjadi dua bagian, yaitu batang pendulum dan kereta. Batang pendulum dapat berotasi secara vertikal yang bersumbu pada sisi kereta. Sedangkan kereta mampu bergerak arah horizontal pada rel dengan panjang yang terbatas. Model fisik serta gaya-gaya yang terjadi pada Sistem Pendulum Kereta ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Model Fisik Sistem Pendulum Kereta

Gaya kontrol F searah dengan lintasan kereta. Gaya gesek kereta terhadap rel dinyatakan T_c , sedangkan V adalah gaya normal yang bekerja pada sistem pendulum kereta. Massa kereta dan massa pendulum dinyatakan dengan m_c dan m_p . Jarak antara sumbu rotasi ke pusat massa batang pendulum dinotasikan dengan l dan momen inersia sistem terhadap pusat massa sistem dinotasikan dengan J .

2.2.2 Model Matematika Sistem Pendulum Kereta

Model matematika dari Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan mengetahui arah gaya dan parameter-parameter yang bekerja pada sistem, seperti ditunjukkan pada Gambar 2.4. Batang pendulum berotasi pada bidang vertikal yang bersumbu pada sisi kereta. Sedangkan kereta mampu bergerak maju-mundur sepanjang rel pada bidang horizontal. Komponen gaya yang bekerja pada sistem pendulum kereta ditunjukkan pada Gambar 2.4. Sistem pendulum kereta memiliki empat elemen vektor *state* yang dinyatakan dalam x .

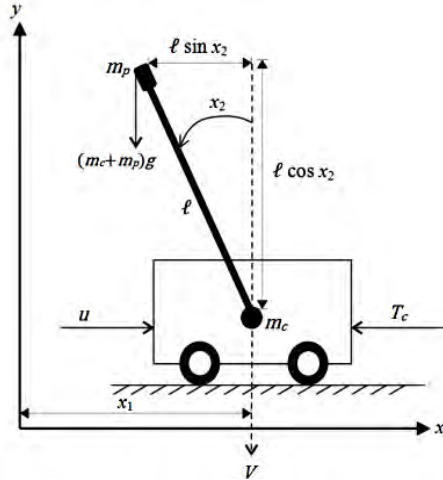
Keempat elemen vektor *state* tersebut adalah :

x_1 : posisi kereta (diukur dari titik tengah rel), x

x_2 : sudut pendulum terhadap garis vertical, θ_p

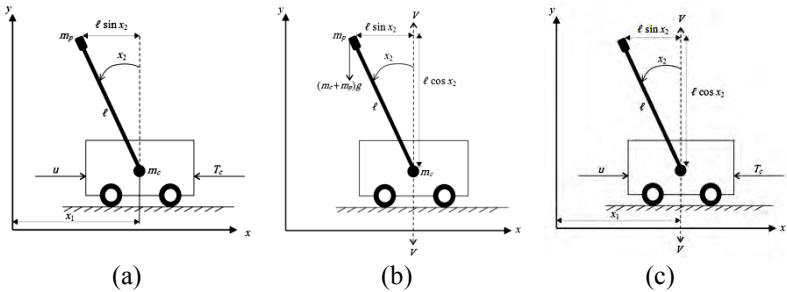
x_3 : kecepatan kereta, v

x_4 : kecepatan sudut pendulum, ω_p



Gambar 2.4 Gaya pada Sistem pendulum kereta

Dari Gambar 2.5 gaya yang terjadi dapat diturunkan kedalam Persamaan (2.1) sampai (2.3). Koordinat arah horizontal pada pusat massa adalah $x_1 - l \sin x_2$ sedangkan arah vertikal pusat massa adalah $l \cos x_2$.



Gambar 2.5 (a) Gaya Translasi terhadap Sumbu x; (b) Gaya Translasi Terhadap Sumbu y; (c) Gaya Rotasi

Sehingga sesuai dengan hukum kedua Newton dan gaya yang bekerja pada sistem pendulum kereta, persamaan gerak dapat ditulis menjadi:

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \quad (2.1)$$

$$(m_c + m_p)(l \cos x_2)'' = V - (m_c + m_p)g \quad (2.2)$$

$$Jx_2'' = (u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p \quad (2.3)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) menyatakan gerak translasi dari pusat massa sistem, sedangkan Persamaan (2.3) menyatakan gerak rotasi sistem terhadap pusat massa sistem. Kecepatan kereta adalah turunan pertama dari posisi kereta dan kecepatan sudut merupakan turunan pertama dari posisi sudut. Secara matematis dapat ditulis :

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt} \text{ atau } \dot{x}_1 = x_3 \text{ dan } x_4 = \frac{dx_2}{dt} \text{ atau } \dot{x}_2 = x_4$$

Dengan mengeliminasi V pada Persamaan (2.2) dan (2.3) serta melakukan beberapa perhitungan sederhana dapat diperoleh persamaan state Sistem Pendulum Kereta seperti pada Persamaan (2.4).

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan:

$$a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p} \text{ dan } \mu = (m_c + m_p)l$$

Jarak antara sumbu rotasi dengan pusat massa sistem dinyatakan sebagai l . Konstanta f_p merupakan konstanta gesek pendulum. Penurunan Persamaan (2.4) dan momen inersia J secara rinci dapat dilihat pada Lampiran A. Parameter-parameter yang digunakan dalam SPK [1] terdapat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Parameter-parameter Sistem Pendulum Kereta

Parameter	Simbol	Nilai
Masa kereta [kg]	m_c	1,12
Massa beban pendulum [kg]	m_{pw}	0,095
Massa batang pendulum [kg]	m_{ps}	0,025
Panjang rel [m]	R_l	1
Panjang batang pendulum [m]	l_p	0,402
Jarak pusat massa batang ke sumbu putar [m]	l_{po}	0,146
Panjang beban [m]	l_c	0,041
Jarak pusat massa beban ke sumbu putar [m]	l_{co}	0,347
Jari-jari beban pendulum [m]	r_c	0,02
Jari-jari batang pendulum [m]	r_p	0,006
Gaya gesek statis [N]	F_s	2,5316
Gaya gesek dinamis (<i>Coulomb</i>) [N]	F_c	2,2813
Gaya kontrol maksimal [N]	u_{max}	17,5
Gaya kontrol minimal [N]	DZ_u	1,3792
Kecepatan minimal kereta [m/det]	DZ_{cv}	0,008
Kecepatan ayun minimal pendulum [rad/det]	DZ_{pv}	0,034
Gaya gesek pendulum [$\text{kg.m}^2/\text{det}$]	f_p	0,0001
Momen inersia pendulum [kg.m^2]	J_p	0,0139
Momen inersia sistem [kg.m^2]	J	0,0136
Jarak sumbu rotasi ke pusat massa sistem [m]	l	0,0168
Kec. kereta awal zona 5 gaya gesek [m/det]	x_c	0,3955
Gaya gesek saat kecepatan kereta x_c [N]	Y_c	2,3815
Tegangan kontrol maksimal [V]	V_m	2,5

2.3 Linearisasi

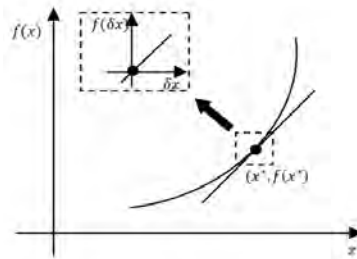
Berdasarkan sifat linearitasnya, sistem dibagi menjadi dua bagian, yaitu sistem linear dan sistem nonlinear. Sistem linear adalah sistem yang memenuhi hukum superposisi, yaitu jika diberikan suatu sistem diberikan masukan tunggal dengan bobot tertentu maka sistem akan memberikan keluaran tunggal dengan bobot yang sama. Sedangkan pada sistem nonlinear, jika sistem diberikan suatu masukan tunggal dengan bobot tertentu maka sistem akan memberikan keluaran tunggal dengan bobot yang tak tentu. Selain itu, sistem nonlinear memiliki perilaku kualitatif, yaitu mempunyai nilai ekuilibrium lebih dari satu [2].

Sistem nonlinear lebih banyak ditemukan daripada sistem linear. Namun hampir semua teori kontrol yang berkembang fokus pada sistem linear. Hal ini dibuktikan bahwa sistem nonlinear dapat didekati dengan sistem linear atau yang dikenal dengan teori linearisasi. Sistem nonlinear dapat dianggap sistem yang linear setelah dilakukan linearisasi yang hanya berlaku di sekitar daerah titik kerja. Teori linearisasi digunakan untuk melinearkan persamaan-persamaan (model) nonlinear pada sistem. Linearisasi model menghasilkan matriks konstanta yang berkesinambungan dengan sistem kontrol linear di setiap daerah kerjanya, Hal tersebut sangat mempermudah pengontrolan.

Sebuah sistem nonlinear dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

dimana $y = f(x)$ adalah kurva yang ditunjukkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Linearisasi $y = f(x)$ pada Sekitar x^*

Garis singgung pada titik x^* merepresentasikan pendekatan linear $f(x)$ di sekitar titik x^* . Hasil linearisasi dari sistem (2.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (f(x) - f(x^*)) &= f(x - x^*) \\ \delta y = f(\delta x) &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \\ \delta x &= x - x^* \text{ dan } \delta y = f(x) - f(x^*) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Titik kerja x^* disebut sebagai titik pusat dari hasil linearisasi. Jika titik kerja sistem berada pada *origin*, dan sistem dilinearisasi pada titik kerjanya, maka $f(x^*) = 0$, sehingga Persamaan (2.6) menjadi:

$$f(x) = \dot{x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} x \quad (2.7)$$

Pada sistem nonlinear lup terbuka terdapat *state* sejumlah n , maka linearisasi sistem pada titik kerja $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{x_1=x_1^* \\ \vdots \\ x_n=x_n^*}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.8)$$

dengan:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } A = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right]_{\substack{x_1=x_1^* \\ \vdots \\ x_n=x_n^*}}$$

Dengan demikian, sistem nonlinear dapat didekati menjadi sistem linear berdasarkan hasil linearisasi di sekitar titik kerjanya, dengan matriks A sebagai matriks Jacobi dari $f(x)$, dan dapat direpresentasikan dalam persamaan berikut:

$$\dot{x} = f(x) + h(x, u) \quad (2.9)$$

Apabila jumlah *state* dalam sistem adalah n , maka linearisasi sistem pada titik kerja $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, u^*]$ adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.10)$$

dengan

$$x = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T \quad (2.11)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_i=x_i^*} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x,u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}}$$

2.4 Teori Logika Fuzzy

Logika *fuzzy* pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi Zadeh pada tahun 1965. Konsep logika *fuzzy* ini meniru cara berpikir manusia dalam merepresentasikan dan menganalisa persoalan-persoalan di alam nyata yang penuh dengan ketidakpastian (kesamaran). Sebelum teori logika *fuzzy* muncul, terlebih dahulu dikenal logika Boolean yang hanya memiliki dua nilai, yaitu benar atau salah. Namun, situasi dalam dunia nyata lebih kompleks dari model benar atau salah tersebut. Objek nyata biasanya memiliki derajat tertentu antara benar atau salah. Logika *fuzzy* adalah logika yang memiliki nilai kekaburan (*fuzziness*) antara benar dan salah. Dalam teori logika *fuzzy* sebuah nilai dapat bernilai benar dan salah secara bersamaan dan besar nilai benar dan salah tersebut tergantung kepada bobot (derajat) keanggotaan yang dimilikinya. Pada subbab ini dijelaskan beberapa teori dasar mengenai logika *fuzzy* yang diperlukan dalam perancangan sistem pada Bab III. Teori tersebut meliputi himpunan *fuzzy*, fungsi keanggotaan, operasi himpunan *fuzzy*, dan sistem inferensi *fuzzy*.

2.4.1 Himpunan Fuzzy

Misalkan X merupakan semesta pembicaraan, x adalah elemen X , dan himpunan tegas (*crisp set*) A , $A \subseteq X$ didefinisikan sebagai kumpulan elemen $x \in X$ sehingga setiap x dapat dikatakan sebagai anggota himpunan A atau tidak. Dalam teori himpunan Boolean, dapat didefinisikan fungsi karakteristik setiap elemen x dalam X .

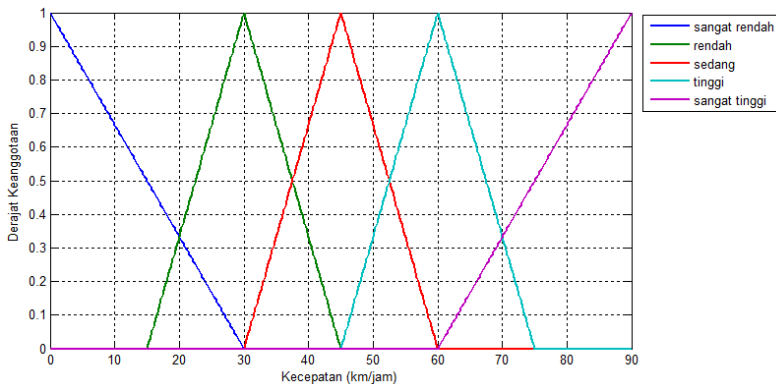
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1; & x \in A \\ 0; & x \notin A \end{cases} \quad (2.12)$$

Definisi himpunan *fuzzy* hampir sama dengan himpunan tegas. Untuk menentukan himpunan tegas disebutkan semua elemen dalam semesta pembicaraan yang termasuk dalam himpunan A . Dalam himpunan *fuzzy*, semua elemen dalam semesta pembicaraan disebutkan dan diberikan bobot antara 0 dan 1. Bobot ini menunjukkan derajat keanggotaan elemen dalam himpunan A . Secara matematis, himpunan *fuzzy* A dalam X dinyatakan:

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\} \quad (2.13)$$

dengan $\mu_A(x)$ adalah fungsi keanggotaan (*membership function*) untuk himpunan *fuzzy* A . Nilai dari fungsi keanggotaan ini menentukan derajat keanggotaan elemen dalam himpunan *fuzzy*.

Sebagai contoh, pada Gambar 2.7 kecepatan motor dapat dikategorikan menjadi lima himpunan, yaitu kecepatan sangat rendah, rendah, sedang, tinggi dan sangat tinggi. Kecepatan sekitar 10 km/jam dikatakan sangat rendah, kecepatan di sekitar 30 km/jam dikatakan rendah, kecepatan di sekitar 45 km/jam dikatakan sedang, kecepatan di sekitar 60 km/jam dikatakan tinggi, sedangkan kecepatan yang lebih dari 90 km/jam dikatakan tinggi.



Gambar 2.7 Himpunan Fuzzy dan Derajat Keanggotaanya

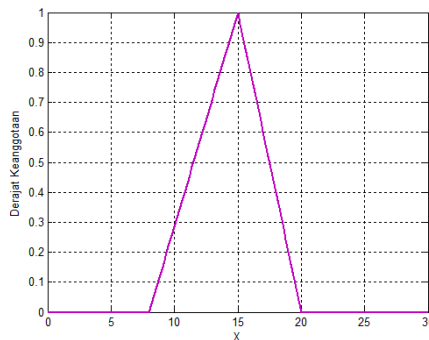
Dalam himpunan *fuzzy*, kecepatan 40 km/jam bisa dikatakan sebagai kecepatan rendah ataupun kecepatan sedang karena kecepatan 40 km/jam memotong dua fungsi keanggotaan yaitu kecepatan rendah dan kecepatan sedang. Namun sesuai dengan Gambar 2.7, kecepatan 73 km/jam dikatakan lebih condong pada kecepatan sangat tinggi karena derajat keanggotaannya lebih besar untuk kecepatan sangat tinggi dibanding kecepatan tinggi.

Terdapat beberapa fungsi keanggotaan dalam himpunan fuzzy, diantaranya adalah:

1. Fungsi Keanggotaan Segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga ditentukan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$. Tiga parameter scalar $\{a, b, c\}$ menentukan fungsi keanggotaan segitiga dengan $a < b < c$. Fungsi keanggotaan segitiga ditunjukkan pada Gambar 2.8. Gambar 2.6 menunjukkan fungsi keanggotaan segitiga dengan parameter $\{9, 15, 20\}$. Secara matematis, derajat keanggotaan untuk fungsi keanggotaan segitiga ditentukan dengan Persamaan (2.14).

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (2.14)$$

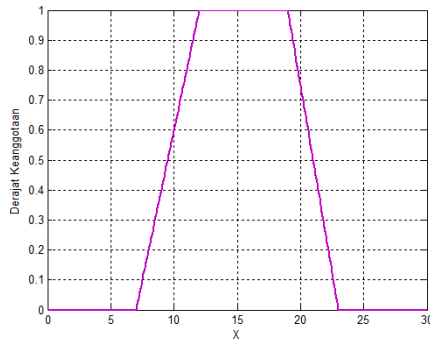


Gambar 2.8 Fungsi Keanggotaan Segitiga dengan $\{a, b, c\} = \{8, 15, 20\}$

2. Fungsi Keanggotaan Trapezium

Persamaan fungsi keanggotaan trapesium (*trapezoid*) dibentuk dengan menggunakan garis lurus. Namun berbeda dengan fungsi keanggotaan segitiga yang ditentukan oleh tiga parameter, fungsi keanggotaan trapesium ditentukan oleh empat parameter scalar $\{a, b, c, d\}$. dengan $a < b < c < d$. Fungsi keanggotaan trapesium ditunjukkan pada Gambar 2.9 dengan parameter $\{7, 12, 19, 23\}$. Derajat keanggotaannya dituliskan sebagai berikut dengan Persamaan (2.15).

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases} \quad (2.15)$$

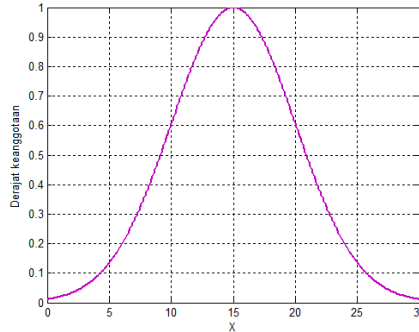


Gambar 2.9 Fungsi Keanggotaan Trapezium

3. Fungsi Keanggotaan Gaussian

Fungsi keanggotaan *Gaussian* ditentukan oleh dua parameter $\{c, \sigma\}$. Parameter c dan σ (standar deviasi) merepresentasikan pusat fungsi keanggotaan dan lebar fungsi keanggotaan. Fungsi keanggotaan *Gaussian* dengan parameter $\{15, 5\}$ ditunjukkan pada Gambar 2.10 dan parameter fungsi keanggotaan *Gaussian* dinyatakan sebagai Persamaan 2.16.

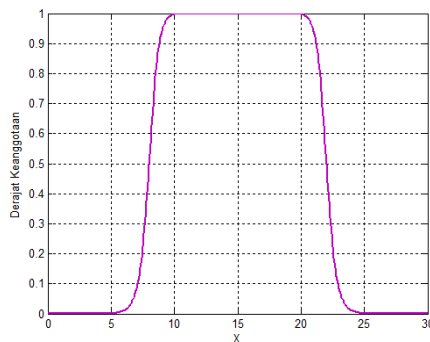
$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (2.16)$$



Gambar 2.10 Fungsi Keanggotaan *Gaussian*

4. Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell*

Fungsi keanggotaan *Generalized Bell* ditentukan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$ seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (2.17). Parameter c menentukan pusat atau letak x yang memiliki derajat keanggotaan dengan nilai 1. Sedangkan parameter a dan b menentukan lebar fungsi keanggotaan dengan b bernilai positif. Fungsi keanggotaan *Generalized Bell* ditunjukkan pada Gambar 2.11 dengan parameter $\{9,12,15\}$.



Gambar 2.11 Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell*

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.17)$$

2.4.2 Operasi Himpunan Fuzzy

Operasi pada himpunan *fuzzy* akan menghasilkan himpunan baru yang elemen-elemennya berasal dari satu atau beberapa himpunan yang dioperasikan tersebut. Operasi-operasi pada himpunan *fuzzy* dapat didefinisikan dengan menggunakan fungsi keanggotaan dari masing-masing himpunan tersebut. Terdapat tiga operasi dasar pada himpunan *fuzzy*, yaiturisan (*intersection*), gabungan (*union*), dan komplemen. Masing-masing operasi dasar pada himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

1. Union (OR)

Union (gabungan) dari himpunan *fuzzy* A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$ adalah $\mu_{A \cup B}(x)$. Gabungan (*union*) dari himpunan *fuzzy* A dan B dapat dinyatakan dengan $A \cup B$. Fungsi union (gabungan) dari himpunan *fuzzy* dapat didefinisikan oleh dua metode berikut:

a. Maximum

Operasi *maximum* dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max \{ \mu_A(x), \mu_B(x) : x \in X \} \quad (2.18)$$

b. Algebraic Sum

Operasi *algebraic sum* dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \{ \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) : x \in X \} \quad (2.19)$$

2. Interseksi (AND)

Interseksi (irisan) dari himpunan *fuzzy* A dan B dengan fungsi keanggotaan $\mu_A(x)$ dan $\mu_B(x)$ adalah $\mu_{A \cap B}(x)$. Irisan dari himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan $A \cap B$. Interseksi himpunan *fuzzy* A dan B merupakan himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya diberikan sebagai operasi *minimum* (2.20) dan operasi *Algebraic product* (2.21) dinyatakan sebagai berikut:

a. Minimum

Operasi *minimum* dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) : x \in X \} \quad (2.20)$$

b. *Algebraic Product*

Operasi *algebraic product* dinyatakan sebagai berikut:

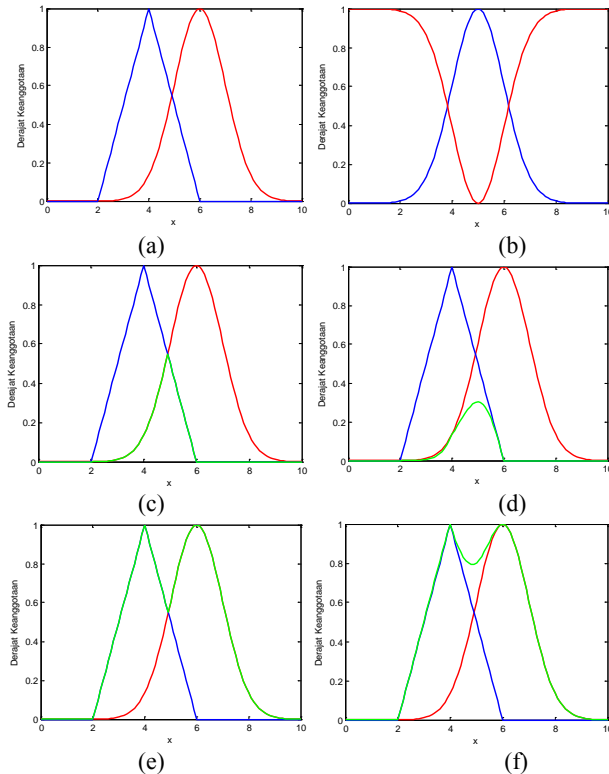
$$\mu_{A \cap B}(x) = \{\mu_A(x)\mu_B(x) : x \in X\} \quad (2.21)$$

3. Komplemen (*NOT*)

Komplemen dari suatu himpunan *fuzzy* B dengan fungsi keanggotaan $\mu_B(x)$ pada Persamaan (2.22) berikut:

$$\mu_{B^c}(x) = 1 - \mu_B(x) \text{ untuk } x \in X \quad (2.22)$$

Himpunan *fuzzy* A dan B serta hasil operasi dari kedua himpunan *fuzzy* tersebut diperlihatkan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Operasi pada Himpunan Fuzzy, (a) Himpunan Fuzzy A dan B, (b) Operasi Komplemen, (c) Operasi Min, (d) Operasi Product, (e) Operasi Max, dan (f) Operasi Algebraic Sum

2.4.3 Sistem Inferensi Fuzzy

Sistem logika Inferensi *fuzzy* mempunyai kemiripan dengan penalaran manusia seperti pengetahuan yang meliputi penalaran *fuzzy*. Penalaran *fuzzy* tersebut dinyatakan sebagai aturan dalam bentuk pernyataan **If-Then** dinyatakan dengan:

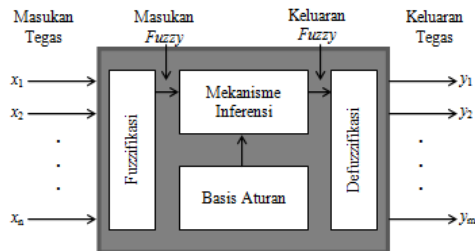
If premis Then konsekuensi

If x is A Then y is B (2.23)

Dengan A dan B adalah nilai linguistik yang didefinisikan oleh himpunan *fuzzy* dari variabel linguistik x dan y . Premis menyatakan masukan dari sistem *fuzzy* dan konsekuensi menyatakan keluaran dari sistem *fuzzy*. Aturan *If-Then* ini dapat direpresentasikan dalam beberapa bentuk. Jika masukan *fuzzy* berjumlah lebih dari satu, maka pernyataan pada bagian premis dalam aturan *fuzzy* dapat menggunakan operator *OR* atau *AND* untuk masing-masing masukan *fuzzy*, seperti berikut:

If x_1 is A_1 AND x_2 is A_2 AND...AND x_n is A_n Then y is B (2.24)

Aturan *fuzzy* yang telah disusun digunakan dalam inferensi *fuzzy*. Inferensi *fuzzy* adalah proses pengambilan keputusan dari setiap premis sesuai aturan *fuzzy* yang telah dibuat. Secara umum, struktur dasar sistem inferensi *fuzzy* seperti pada Gambar 2.13 terdiri dari empat elemen utama, yaitu blok fuzzifikasi, basis aturan, mekanisme inferensi, dan blok defuzzifikasi.



Gambar 2.13 Struktur Dasar Sistem Inferensi Fuzzy

Blok fuzzifikasi mengonversi masukan tegas menjadi masukan *fuzzy*. Basis aturan yang merupakan kumpulan dari aturan *If-Then* memetakan masukan *fuzzy* menjadi keluaran *fuzzy* sesuai dengan deskripsi linguistik yang ditentukan. Mekanisme inferensi *fuzzy*

melakukan pengambilan keputusan dengan menggunakan aturan *fuzzy* dalam basis aturan. Blok defuzzifikasi mengonversi keluaran *fuzzy* menjadi keluaran tegas.

Mekanisme inferensi *fuzzy* dalam pengambilan suatu keputusan memiliki lima langkah sebagai berikut:

1. Fuzzifikasi input
Pemetaan masukan tegas menjadi masukan *fuzzy* dengan menentukan derajat keanggotaannya dalam semua himpunan *fuzzy* menggunakan fungsi keanggotaannya masing-masing.
2. Aplikasi operator *fuzzy*
Penerapan operator *fuzzy* (*OR* atau *AND*) pada bagian premis dalam aturan *fuzzy* untuk memperoleh kuat penyulutan setiap aturan.
3. Aplikasi metode implikasi *fuzzy*
Pengoperasian kuat penyulutan yang diperoleh dengan himpunan *fuzzy* yang terdefinisi untuk setiap keluaran pada bagian konsekuen masing-masing aturan.
4. Aplikasi metode agregasi konsekuen untuk semua aturan
Penggabungan semua hasil implikasi *fuzzy* dari setiap aturan untuk menghasilkan keluaran (konklusi) *fuzzy*.
5. Defuzzifikasi
Perhitungan keluaran (konklusi) *fuzzy* menjadi keluaran tegas.

Metode defuzzifikasi yang sering digunakan adalah *center of gravity* dan *center (weighted) average*. Proses defuzzifikasi dengan metode *center of gravity* dilakukan dengan mencari pusat massa dari gabungan seluruh hasil implikasi *fuzzy*. Keluaran tegas dengan metode *center of gravity* dapat dirumuskan sebagai berikut:

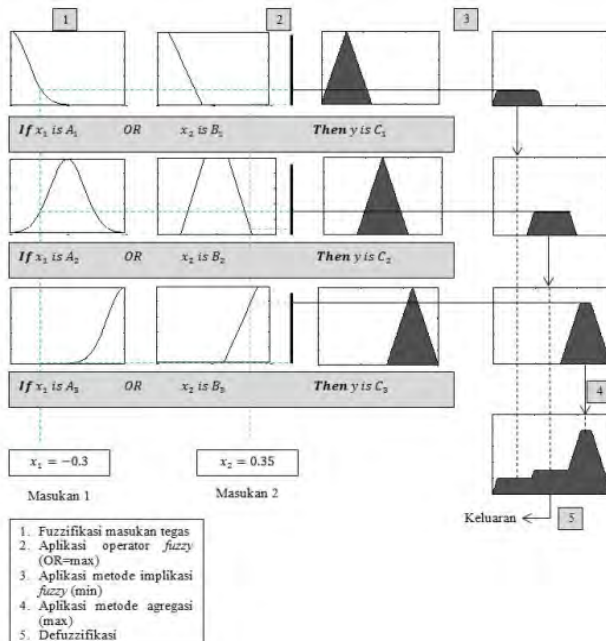
$$y^{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \int \mu_i(y) dy}{\sum_{i=1}^r \int \mu_i(y) dy} \quad (2.25)$$

Dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan bagian konsekuen $\mu_i(y)$, dan $\int \mu_i(y) dy$ adalah luas area di bawah $\mu_i(y)$. Sedangkan proses defuzzifikasi dengan metode *center (weighted) average* dilakukan dengan mencari rata-rata nilai tengah dari gabungan seluruh hasil implikasi *fuzzy*. Keluaran tegas

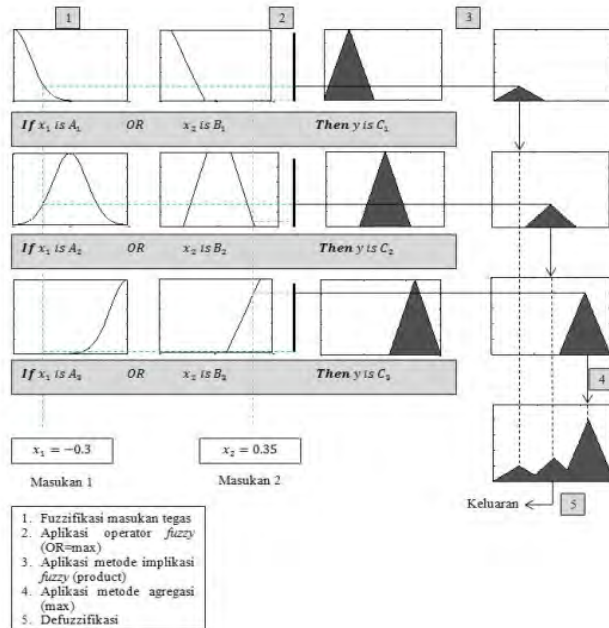
dengan metode *center (weighted) average* dapat dirumuskan seperti pada Persamaan (2.26).

$$y^{tegas} = \frac{\sum_{i=1}^r b_i \mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \quad (2.26)$$

Dengan r adalah banyaknya aturan, b_i adalah titik tengah dari fungsi keanggotaan bagian konsekuen, dan μ_i adalah kuat penyulutan masing-masing aturan. Keluaran tegas hasil proses inferensi fuzzy Mamdani dapat diperoleh dengan menerapkan operasi *max-min* atau *max-product*. Gambar 2.14 menunjukkan keluaran tegas hasil proses inferensi fuzzy yang diperoleh dengan menerapkan operasi *max-min*. Sedangkan Gambar 2.15 menunjukkan keluaran tegas hasil inferensi fuzzy yang diperoleh dengan menerapkan operasi *max-product*.



Gambar 2.14 Inferensi Fuzzy Mamdani Menggunakan Metode Max-Min



Gambar 2.15 Inferensi Fuzzy Mamdani Menggunakan Metode Max-Product

Terdapat dua tipe sistem inferensi fuzzy, yaitu tipe Mamdani dan tipe Sugeno. Dua tipe ini berbeda pada penentuan keluaran dan pendekatan yang digunakan. Kontrol fuzzy yang dibangun secara heuristik tanpa model matematika dari sistem menggunakan tipe inferensi Mamdani. Sedangkan kontrol fuzzy yang dibangun berdasarkan model matematika dari sistem menggunakan tipe inferensi Sugeno.

Misalkan model fuzzy Mamdani memiliki bentuk aturan yang dapat ditulis sebagai berikut:

Aturan 1 : **If** x_1 is A_1 **OR** x_2 is B_1 **Then** y is C_1

Aturan 2 : **If** x_1 is A_2 **OR** x_2 is B_2 **Then** y is C_2

Aturan 3 : **If** x_1 is A_3 **OR** x_2 is B_3 **Then** y is C_3

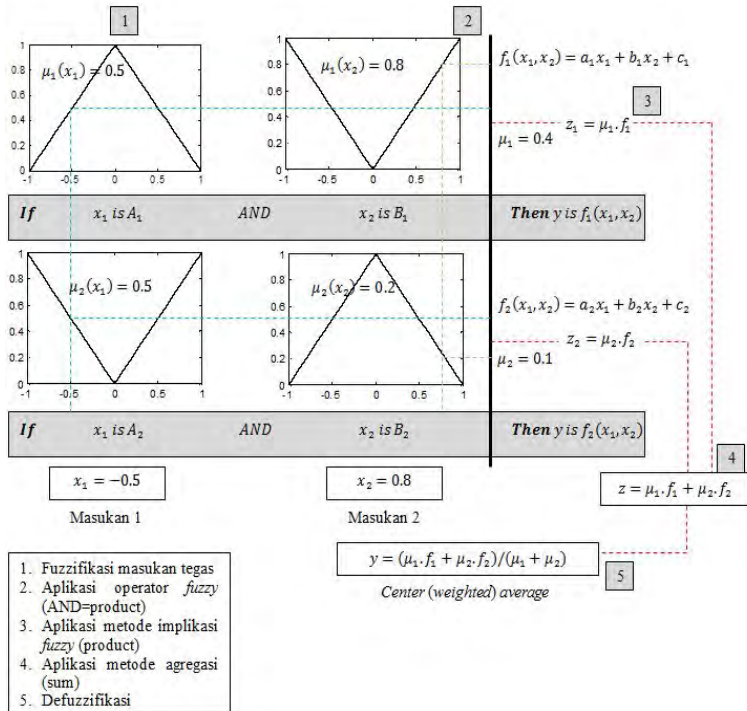
Untuk sistem inferensi fuzzy tipe Sugeno, keluaran fuzzy yang dihasilkan merupakan kombinasi linear dari masing-masing masukan tegas.

Model *fuzzy* Sugeno memiliki bentuk aturan yang dapat ditulis sebagai berikut:

Aturan 1 : **If** x_1 is A_1 **AND** x_2 is B_1 **Then** y is $f_1(x_1, x_2)$

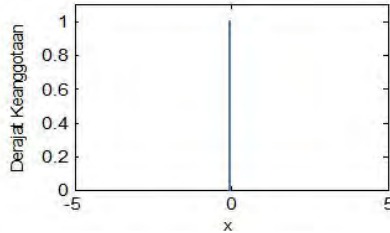
Aturan 2 : **If** x_1 is A_2 **AND** x_2 is B_2 **Then** y is $f_2(x_1, x_2)$

Pada model Sugeno, $f(x_1, x_2)$ merupakan fungsi polinomial dalam x_1 dan x_2 . Jika $f(x_1, x_2)$ merupakan polinomial orde satu, maka keluaran *fuzzy* merupakan kombinasi linear dari masing-masing masukan tegas dan dapat dikatakan model Sugeno orde satu. Proses inferensi *fuzzy* tipe Sugeno dapat dilihat pada Gambar 2.16. Jika $f(x_1, x_2)$ merupakan polinomial orde nol, maka keluaran *fuzzy* merupakan konstanta dan dapat dikatakan sebagai bentuk khusus dari model Mamdani dengan masing-masing konsekuen aturan ditentukan oleh *fuzzy singleton*.



Gambar 2.16 Inferensi Fuzzy Sugeno Menggunakan Metode Defuzzifikasi Center (Weighted) Average

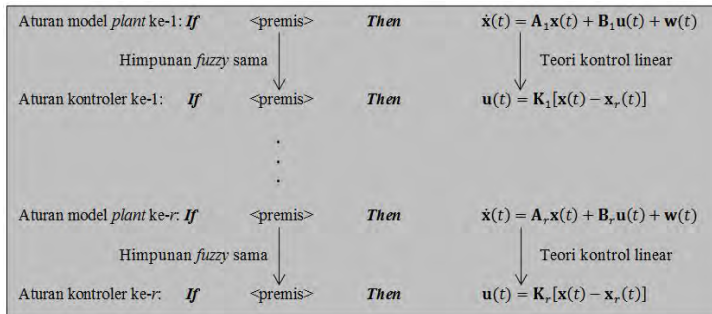
Fuzzy singleton adalah himpunan *fuzzy* (misalkan himpunan *fuzzyA*) yang mempunyai fungsi keanggotaan bernilai nolkecuali pada satu titik x dalam semesta pembicaraan X dengan $\mu_A(x) = 1$. Contoh *fuzzy singleton* dapat dilihat pada Gambar 2.17 dengan $x = 0$ dan $\mu_A(0) = 1$.



Gambar 2.17 *Fuzzy Singleton*

2.5 Model *Fuzzy Takagi-Sugeno*

Model *fuzzy Takagi-Sugeno* (T-S) telah banyak digunakan untuk merepresentasikan perilaku sistem nonlinear. Model *fuzzy* yang diusulkan oleh Takagi dan Sugeno ini dideskripsikan dengan aturan *fuzzy If-Then* yang merepresentasikan hubungan linear lokal masukan-keluaran dari sistem nonlinear. Tujuan utama dari model *fuzzy T-S* adalah untuk menyatakan dinamika lokal dari tiap-tiap implikasi *fuzzy* (aturan) dengan model sistem linear [4]. Dalam skema PDC, setiap aturan kontroler berfungsi sebagai kompensasi aturan *plant* yang bersesuaian. Deskripsi dari skema PDC ditunjukkan pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Skema PDC

Model *fuzzy* keseluruhan dari sistem diperoleh dengan pencampuran (*blending*) *fuzzy* dari beberapa model sistem linear. Desain aturan kontroler untuk *plant* nonlinear berbasis model *fuzzy* T-S dilakukan dengan menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC).

Variabel premis yang digunakan dalam aturan *If-Then* dapat berupa variabel sistem yang terukur, sinyal kontrol, dan sebagainya. Sedangkan bagian konsekuen dari aturan *If-Then* untuk aturan *plant* merupakan representasi *state* sistem nonlinear yang diperoleh dari linearisasi pada beberapa titik kerja. Bagian konsekuen untuk aturan kontroler adalah *gain* kontroler untuk mengompensasi aturan *plant* yang bersesuaian [5].

Model *fuzzy* T-S (2.27) merupakan contoh untuk sistem kontrol *fuzzy* kontinyu.

Aturan *plant* ke- i :

If $\lambda_1(t)$ is M_{i1} AND...AND $\lambda_g(t)$ is M_{ig}

Then $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

$y(t) = C_i x(t) + D_i u(t)$

$i = 1, 2, 3, \dots, r$ (2.27)

dengan r adalah jumlah aturan *fuzzy*, g adalah jumlah himpunan *fuzzy* dalam satu aturan, M_{ig} adalah himpunan *fuzzy*, $x(t) \in R^n$ merupakan vektor *state*, $u(t) \in R^m$ merupakan vektor kontrol masukan, $w(t) \in R^n$ merupakan gangguan, $y(t) \in R^q$ merupakan vektor keluaran sistem, A_i , B_i , C_i , dan D_i adalah matriks *state*, matriks masukan, matriks keluaran, dan matriks transmisi langsung, dan $\lambda(t) \in R^g$ adalah variabel premis yang dapat berupa fungsi dari variabel *state*, gangguan eksternal, dan/atau waktu.

Inferensi *fuzzy* yang digunakan pada (2.27) menggunakan penghubung AND (operator *product*) dan metode defuzzifikasi yang digunakan adalah *center (weighted) average*. Bentuk keseluruhan model *fuzzy* T-S (2.27) dapat dinyatakan sesuai dengan (2.28) dan (2.29). Blok diagram yang digunakan sebagai kontroler dapat dilihat pada Gambar 2.19.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2.28)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) [C_i x(t)] \quad (2.29)$$

dengan:

$$h_i = \frac{\mu_i(\lambda(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda(t))}$$

$$\mu_i(\lambda(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(\lambda_j(t))$$

Selain itu, dengan mengasumsikan bahwa

$$\mu_i(\lambda(t)) \geq 0$$

dan

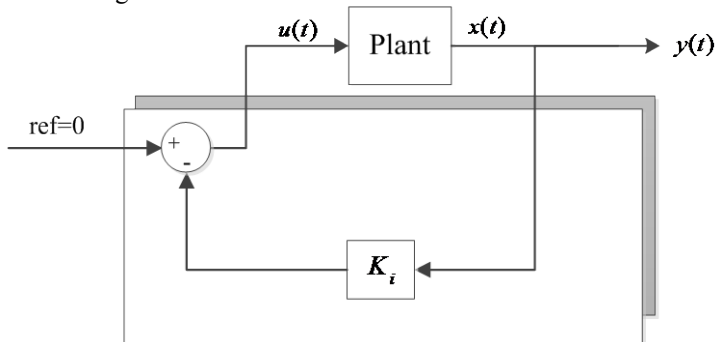
$$\sum_{i=1}^r \mu_i(\lambda(t)) > 0; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

untuk semua t , maka:

$$h_i(\lambda(t)) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) = 1$$

dengan blok diagram sistem:



Gambar 2.19 Sistem Kontrol Stabilisasi *Fuzzy* Lokal ke- i

Model *fuzzy* T-S dalam (2.28) adalah persamaan nonlinear *time-varying* dan digunakan untuk memodelkan perilaku sistem dinamik nonlinear. Selanjutnya, aturan kontroler disusun dengan mengadopsi skema PDC. Jika semua *state* terukur, maka aturan kontroler *fuzzy* berikut digunakan untuk mendesain sistem kontrol *fuzzy* yang dimaksud.

Aturan kontroler ke- j :

If $\lambda_1(t)$ is M_{i1} AND ... AND $\lambda_g(t)$ is M_{ig}

Then $u(t) = K_j x(t)$

$$j = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.30)$$

Keluaran dari kontroler *fuzzy* pada (2.30) secara keseluruhan dapat dinyatakan oleh (2.31).

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(\lambda(t)) K_j x(t) \quad (2.31)$$

Substitusi (2.31) ke dalam (2.28) dan (2.29), maka akan diperoleh sistem lup tertutup sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\lambda(t)) h_j(\lambda(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t)] \quad (2.32)$$

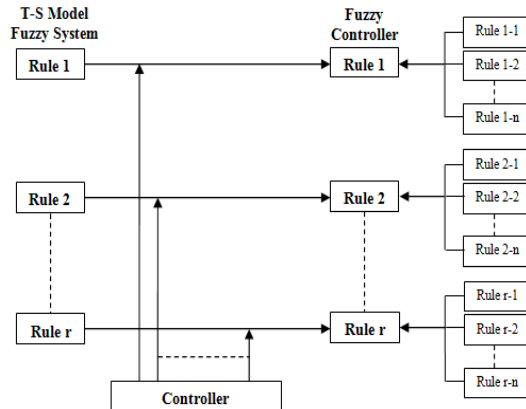
$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\lambda(t)) [C_i x(t)] \quad (2.33)$$

2.6 Parallel Distributed Compensation (PDC) Modifikasi

Pada konsep PDC modifikasi, *state feedback gain* yang dimiliki dapat dikategorikan kembali menjadi beberapa kondisi. Kondisi yang ditentukan pada setiap subsistem dilakukan berdasarkan nilai maksimum parameter yang ingin diukur dan dibagi sesuai range yang diinginkan. Beberapa *gain* yang terkait dari masing-masing subsistem kemudian dilakukan proses pencampuran “*blending*” *fuzzy*, sehingga respon yang diinginkan dapat tercapai.

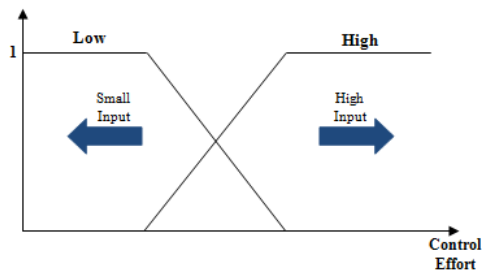
Pembagian range dalam fungsi keanggotaan yang dipilih dilakukan berdasarkan kinerja parameter yang ingin dicapai, misalnya respon sinyal kontrol cepat, sedang, dan lambat. Secara umum, metode untuk menghitung *state feedback gain* secara keseluruhan tetap sama

dengan metode PDC Konvensional. Bentuk susunan metode PDC modifikasi, bentuk tersebut bergantung pada karakteristik yang ingin dikontrol ditunjukkan pada Gambar 2.20.



Gambar 2.20 Struktur Umum dari Metode PDC Modifikasi

Misalnya terdapat dua subsistem, apabila sistem dirancang menggunakan PDC konvensional akan diperoleh dua *gain feedback*. Sedangkan apabila sistem dirancang menggunakan PDC modifikasi, dari satu subsistem kondisi dari pemilihan gain dapat disesuaikan dengan rancangan yang diinginkan contohnya dapat dibagi menjadi sinyal kontrol rendah dengan respon waktu penyelesaian lebih lama, dan sinyal kontrol tinggi dengan respon lebih cepat. Hal ini dilakukan untuk memilih *feedback gain* secara terperinci. Pada Gambar 2.21 ditunjukkan bahwa pembagian *range gain* pada satu subsistem dibagi menjadi sinyal kontrol rendah dan sinyal kontrol tinggi.



Gambar 2.21 Fungsi Keanggotaan PDC Modifikasi

Ketika nilai sinyal kontrol besar, maka bobot relatif *state feedback gain* akan dipilih sesuai besarnya derajat keanggotaan. Begitu pula pada saat *state feedback gain* berada pada kondisi sinyal kontrol rendah, maka derajat keanggotaan akan diperoleh dari fungsi keanggotaan sinyal kontrol rendah [3]. Dinamika dari sistem kontrol *loop* tertutup dapat dianalisis dengan mengikuti model Takagi-Sugeno:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t)(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.34)$$

Aturan kontroler *fuzzy*:

$$\text{If } Z_1(t) \text{ is } M_{i1}, \text{ and } Z_2(t) \text{ is } M_{i2}; \dots, \text{ and } Z_p(t) \text{ is } M_{ip}, \\ J(t) \text{ is } H_i^1; \dots, \text{ and } J(t) \text{ is } H_i^{q_i} \quad (2.35)$$

Then

$$u_i(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{q_i} m_i^n(J(t)) * K_i^n \right\} x(t) \quad (2.36)$$

dimana:

q_i = jumlah koefisien *gain* dari subsistem i

m_i^n = derajat keanggotaan untuk $J(t)$

K_i^n = *state feedback gain* ke n yang terkait dengan subsistem i

H_i^n = fungsi keanggotaan untuk $J(t)$ yang didefinisikan dalam aturan i

$J(t)$ = istilah yang menggambarkan indeks kinerja yang dipilih. Apabila besaran sinyal kontrol $u(t)$ ingin dibatasi, maka $J(t) = |u(t)|$.

Masukan kontrol secara keseluruhan yang dihasilkan oleh kontroler PDC adalah dalam bentuk K_i , dapat dilihat dalam bentuk:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) u_i(t) = - \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) K_i \right\} x(t) \quad (2.37)$$

$$K_i = \sum_{n=1}^{q_i} m_i^n(J(t)) K_i^n$$

2.7 Linear Quadratic Regulator (LQR)

Metode yang digunakan untuk memperoleh *state feedback gain* dalam pengendalian kestabilan pendulum-kereta yaitu metode LQR. Dalam sebuah sistem kontrol, kontroler mempunyai kontribusi yang besar terhadap perilaku sistem. Salah satu tugas kontroler adalah meminimalkan sinyal kesalahan, yaitu *set point* dan sinyal aktual. Semakin cepat sinyal reaksi sistem (sinyal aktual) mengikuti sinyal set point dan semakin kecil kesalahan yang terjadi, maka semakin baiklah kinerja sistem kontrol yang diinginkan. Kontrol optimal secara umum ditujukan untuk memilih input plant u dengan indeks performansi yang minimum.

Linear Quadratic Regulator, disebut *linear* karena model dan kontrolernya berupa *linear*. Sedangkan disebut kuadratik karena *cost function* dari sistem merupakan kuadratik dan karena referensinya bukan berupa fungsi waktu maka disebut regulator. Sistem kontrol dikatakan baik, apabila sistem kontrol tersebut memiliki daya tanggap yang cepat dan stabil, tetapi tidak membutuhkan energi yang berlebihan.

Sistem kontrol dengan karakteristik tersebut dapat dicapai dengan menggunakan indeks performansi yang tepat. Sistem kontrol yang dirancang berdasarkan optimasi indeks performansi disebut sistem kontrol optimal. Indeks performansi dalam interval $[t_0, \infty]$ diupayakan dapat meminimalisasi energi (*cost function/quadratic function*) dapat dinyatakan dengan Persamaan (2.38)

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.38)$$

dimana :

t_0 = waktu awal

∞ = waktu akhir

Q = matriks semidefinit positif

R = matriks definit positif

Persoalan regulator dapat diselesaikan dengan menggunakan Aljabar *Riccati* sebagai berikut:

$$A^T P + AP - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.39)$$

Pemilihan pembobot matriks Q dan R berpedoman pada:

1. Semakin besar nilai Q , maka akan semakin memperbesar harga elemen penguatan K sehingga mempercepat sistem untuk mencapai keadaan stabil (*intermediate state cost function*).
2. Semakin besar harga R , maka akan memperkecil harga Penguatan K dan memperlambat keadaan tunak (*energy drive*).

State feedback gain diperoleh dengan menggunakan solusi aljabar Riccati sebagai berikut:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.40)$$

dengan sinyal kontrol:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (2.41)$$

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB III

PERANCANGAN SISTEM

Bab ini akan membahas mengenai linearisasi model matematika Sistem Pendulum Kereta di dua titik kerja. Kemudian kontroler linear akan dirancang untuk masing-masing model linear yang telah diperoleh dengan menggunakan pendekatan model *fuzzy* T-S sesuai konsep PDC modifikasi. Perhitungan *gain* kontroler dilakukan dengan menggunakan LQR. Pada akhir Bab ini, perancangan sistem menggunakan Simulink/MATLAB akan ditunjukkan untuk simulasi dan implementasi pada sistem pendulum kereta.

3.1 Linearisasi Model Matematika Sistem Pendulum Kereta

Linearisasi model pendulum ini diambil dari besar sudut pendulum yang terjadi, pada Tugas Akhir ini titik-titik linearisasi diambil pada sudut 0 dan 0,2 rad (11,46 derajat). Untuk menerapkan teori kontrol linear ke dalam desain kontroler, maka Persamaan (2.4) harus dilinearisasi pada titik kerja yang diinginkan. Titik kerja suatu sistem terletak di sekitar titik ekuilibriumnya sehingga linearisasi lokal pada Sistem Pendulum Kereta akan dilakukan pada titik ekuilibriumnya. Dari Persamaan (2.4) diperoleh:

$$\dot{x} = f(x) + h(x, u) \quad (3.1)$$

dengan:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_4 x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_4 x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$h(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{au}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{ul \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

Proses linearisasi Sistem Pendulum Kereta dilakukan pada *state* x_2 karena tujuan dari desain kontroler terletak pada stabilisasi pendulum di posisi terbalik, yaitu saat *state* x_2 bernilai 0 rad. Titik kerja *state* x_2 yang dipilih adalah pada titik kerja 0 rad dan $\pm 0,2$ rad. Titik kerja tersebut dipilih karena berada pada daerah kestabilan yang masih dapat dikontrol. Persamaan linear dari sistem pendulum kereta direpresentasikan ke dalam matriks Jacobi A dan B , yaitu pada Persamaan (3.3):

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (3.3)$$

dengan:

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

Penurunan matriks Jacobi dapat dilihat pada Lampiran A.2. Secara keseluruhan bentuk umum matriks Jacobi adalah:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & 0 & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

dengan:

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{g\mu \cos^2 x_2 - a\mu x_4^2 \cos x_2 - l \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ A_{34} &= \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - f_p l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ A_{42} &= \frac{g\mu \cos x_2 - \mu x_4^2 \cos^2 x_2 - l \sin x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \end{aligned}$$

$$A_{44} = \frac{-2\mu l x_4 \cos x_2 \sin x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$B_{31} = \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$B_{41} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

Dari Persamaan (3.4) didapat matriks hasil linearisasi A , B , dan C sesuai dengan titik kerja yang dipilih. Hasil linearisasi sitem pendulum kereta pada titik kerja $state \ x_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ rad adalah:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (3.5)$$

dengan:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2524 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,0319 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix}$$

Hasil linearisasi sitem pendulum kereta pada titik kerja dengan $state \ x_2 = [0 \ \pm 0,2 \ 0 \ 0]$ rad adalah :

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \quad (3.6)$$

dengan:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2317 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,6874 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8264 \\ 1,2111 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks C dari sistem pendulum kereta diperoleh:

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan (3.5) dan (3.6) merupakan model linear dari sistem pendulum kereta di sekitar titik kerja $x_2^* = 0$ rad dan $x_2^* = \pm 0,2$ rad. Algoritma untuk linearisasi sistem pendulum kereta dapat dilihat pada Lampiran A.2.

3.2 Pemodelan *Fuzzy Takagi-Sugeno*

Pemodelan *fuzzy Takagi-Sugeno* disusun berdasarkan hasil linearisasi beberapa titik kerja dengan membentuk aturan seperti Persamaan (2.34) dan Persamaan (2.35) yang telah dijelaskan pada Subbab 2.6. Dengan melinearisasi pada dua titik kerja, yaitu $x_2^* = 0$ rad dan $x_2^* = \pm 0,2$ rad, maka model *Fuzzy T-S* yang digunakan memiliki dua aturan dengan satu variabel premis, yaitu sudut pendulum. Dalam menyusun aturan *fuzzy T-S*, aturan yang dibentuk menggunakan model linear pada Persamaan (3.5) dan (3.6). Aturan model *Fuzzy T-S* yang dibentuk adalah sebagai berikut:

Aturan *plant* ke-1:

$$\begin{aligned} \textbf{If} \quad & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \textbf{Then} \quad & \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 x(t) \\ & y(t) = C_1 x(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aturan *plant* ke-2:

$$\begin{aligned} \textbf{If} \quad & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,2 \text{ rad)} \\ \textbf{Then} \quad & \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 x(t) \\ & y(t) = C_2 x(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dengan menggunakan konsep PDC, dapat disusun aturan kontroler *Fuzzy* yang sesuai dengan aturan *plant* pada (3.7) dan (3.8) sebagai berikut:

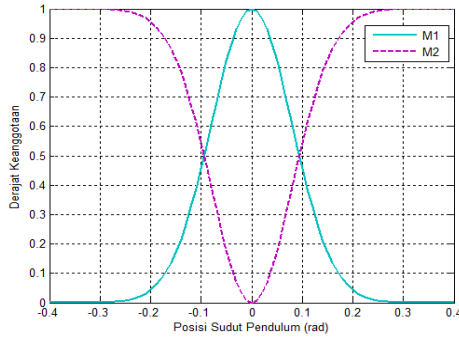
Aturan kontroler ke-1:

$$\begin{aligned} \textbf{If} \quad & x_2(t) \text{ is } M_1 \text{ (sekitar } 0 \text{ rad)} \\ \textbf{Then} \quad & u(t) = -K_1 x(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Aturan kontroler ke-2:

$$\begin{aligned} \textbf{If} \quad & x_2(t) \text{ is } M_2 \text{ (sekitar } \pm 0,2 \text{ rad)} \\ \textbf{Then} \quad & u(t) = -K_2 x(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fungsi keanggotaan M_1 yang digunakan adalah fungsi keanggotaan *Gaussian* seperti ditunjukkan pada Gambar 3.1 dengan parameter $c = 0$ dan $\sigma = 0,08$. Sedangkan fungsi keanggotaan M_2 adalah komplemen dari M_1 . Baik M_1 ataupun M_2 merupakan fungsi dari posisi sudut pendulum. Dalam bentuk matematika, fungsi keanggotaan M_1 dan M_2 dapat dituliskan seperti pada Persamaan (3.11) [7].



Gambar 3.1 Fungsi Keanggotaan Aturan Model *Plant* dan Kontroler

$$M_1(x_2(t)) = e^{-0,5 \left(\frac{x_2(t)}{0,08} \right)^2}$$

$$M_2(x_2(t)) = 1 - M_1(x_2(t)) \quad (3.11)$$

Bentuk keseluruhan model *fuzzy* T-S pada Persamaan (3.7) dan (3.8) dapat dilihat pada Persamaan (3.12).

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(x_2(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)]$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(x_2(t)) [C_i x(t)] \quad (3.12)$$

Sedangkan keluaran kontroler *fuzzy* pada (3.9) dan (3.10) secara keseluruhan dapat ditulis seperti pada Persamaan (3.13)

$$u(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(x_2(t)) [-Kx(t)] \quad (3.13)$$

Substitusi (3.13) pada (3.12) akan didapat:

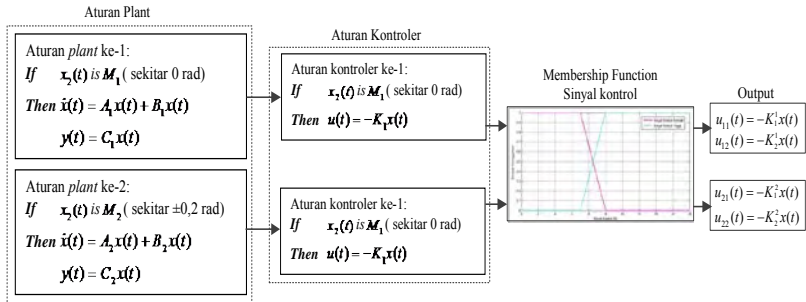
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_i(x_2(t)) M_j(x_2(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t)] \\ y(t) &= \sum_{i=1}^2 M_i(x_2(t)) [C_i x(t)]\end{aligned}\quad (3.14)$$

Persamaan (3.13) akan menghasilkan bentuk sinyal kontrol yang dapat ditulis seperti pada Persamaan (3.15).

$$u(t) = M_1(x_2(t))[-K_1 x(t)] + M_2(x_2(t))[-K_2 x(t)] \quad (3.15)$$

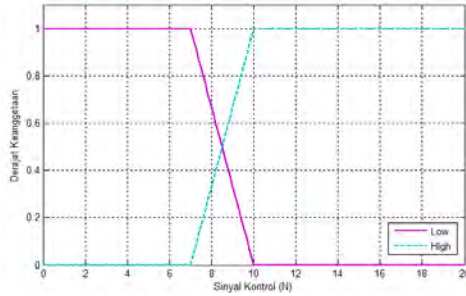
3.3 Perancangan Kontroler *Fuzzy PDC Modifikasi*

Berdasarkan subbab 2.6 dijelaskan bahwa *gain state feedback* yang dimiliki dapat dikategorikan kembali menjadi beberapa kondisi. Kondisi yang ditentukan pada setiap subsistem dilakukan berdasarkan nilai maksimum parameter yang ingin diukur dan dibagi sesuai range yang diinginkan. Gambar 3.2 menunjukkan bentuk susunan metode PDC modifikasi dengan 2 subsistem, hasil *gain state feedback* yang diperoleh akan dikategorikan menjadi 2 kondisi sesuai parameter yang diinginkan yaitu sinyal kontrol.



Gambar 3.2 Struktur PDC Modifikasi dengan 2 Subsistem

Pada perancangan aturan PDC modifikasi, sinyal kontrol dibagi menjadi 2 *range* sinyal, yaitu sinyal kontrol rendah dan sinyal kontrol tinggi. Fungsi keanggotaan sinyal kontrol ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Fungsi Keanggotaan Sinyal Kontrol

Dari aturan *fuzzy* T-S pada (3.7) sampai (3.10) maka akan diperoleh 2 grafik fungsi keanggotaan, yaitu fungsi keanggotaan Gaussian untuk aturan model plant dan kontroler dan fungsi keanggotaan sinyal kontrol untuk PDC modifikasi. Maka untuk aturan kontroler akan diperoleh 4 buah rule, yaitu :

Aturan 1 : **If** $x_2(t)$ is M_1 (0 rad) **AND** $|u(t)|$ is “high”

$$\text{then } u(t) = -K_1^1 x(t)$$

Aturan 2 : **If** $x_2(t)$ is M_1 (0 rad) **AND** $|u(t)|$ is “low”

$$\text{then } u(t) = -K_2^1 x(t)$$

Aturan 3 : **If** $x_2(t)$ is M_2 ($\pm 0,2$ rad) **AND** $|u(t)|$ is “high”

$$\text{then } u(t) = -K_1^2 x(t)$$

Aturan 4 : **If** $x_2(t)$ is M_2 ($\pm 0,2$ rad) **AND** $|u(t)|$ is “low”

$$\text{then } u(t) = -K_2^2 x(t) \quad (3.16)$$

Diketahui dari subbab 2.6 bahwa masukan kontrol secara keseluruhan yang dihasilkan oleh kontroler PDC adalah dalam bentuk K_i , dapat dilihat dalam bentuk:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x_2(t)) u_i(t) \quad (3.17)$$

dengan:

$$u_i(t) = \sum_{n=1}^2 m_i K_i^n x(t)$$

$$m_i = \frac{\beta_i(x_2(t))}{\sum_{i=1}^2 \beta_i(x_2(t))} \quad (3.18)$$

β = nilai derajat keanggotaan fungsi keanggotaan sinyal kontrol

Untuk memperoleh sinyal kontrol keseluruhan maka Persamaan (3.18) dapat disubstitusikan ke Persamaan (3.17), sehingga diperoleh Persamaan (3.19)

$$u(t) = \alpha_1(x_2(t))u_1(t) + \alpha_2(x_2(t))u_2(t) \quad (3.19)$$

dengan:

$$u_1(t) = \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} K_1^1 + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} K_2^1 \right] x(t) \quad (3.20)$$

$$u_2(t) = \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} K_1^2 + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} K_2^2 \right] x(t) \quad (3.21)$$

Sinyal kontrol keseluruhan dari 2 subsistem dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (3.20) dan (3.21) ke dalam Persamaan (3.19), maka akan diperoleh Persamaan (3.22)

$$u(t) = \alpha_1(x_2(t)) \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} (-K_1^2) + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} (-K_2^2) \right] x(t)$$

$$+ \alpha_2(x_2(t)) \left[\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} (-K_1^2) + \frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} (-K_2^2) \right] x(t) \quad (3.22)$$

3.4 Perhitungan *State Feedback Gain* dengan *Linear Quadratic Regulator (LQR)*

Kontroler *Fuzzy-Optimal Control* yang didesain memerlukan berbagai prosedur yang digunakan untuk mendapatkan struktur dan parameter kontroler. Prosedur desain kontroler *Fuzzy* ini dilakukan melalui beberapa tahap seperti berikut ini

3.4.1 Kombinasi *Q* dan *R*

Sesuai dengan representasi Persamaan *state* sistem yang telah diperoleh sebelumnya, matriks pembobot dipilih berbeda untuk setiap

model linear. Matriks pembobot yang dipilih disesuaikan dengan indeks performansi, yaitu:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.23)$$

Untuk memilih kombinasi matriks Q dan R sesuai dengan respon yang diinginkan, maka diperlukan proses *trial and error* untuk dapat memilih kombinasi matriks yang paling baik. Karena aturan kontroler yang digunakan adalah PDC modifikasi, maka dibutuhkan 2 kombinasi untuk mewakili kombinasi Q dan R , yaitu kombinasi Q dan R sinyal kontrol rendah dan kombinasi Q dan R sinyal kontrol tinggi. Setelah melakukan proses *trial and error* maka matriks pembobot yang dipilih adalah sebagai berikut.

Kombinasi Q dan R sinyal kontrol rendah :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}; R_1 = [1]$$

Kombinasi Q dan R sinyal kontrol tinggi :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}; R_2 = [0,3]$$

3.4.2 Mendapatkan Solusi Kontrol Optimal

Solusi kontrol optimal pada dasarnya adalah mendapatkan nilai *gain* K yang mampu meminimalkan indeks performansi. *Gain* tersebut diperoleh melalui perhitungan aljabar Riccati yaitu Persamaan 3.24.

$$A^T P + AP - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.24)$$

Dari nilai P yang dihasilkan dari aljabar Riccati, maka *gain* K dapat diperoleh dengan menggunakan Persamaan (3.25)

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3.25)$$

Berdasarkan aturan kontroler yang telah dirancang, maka diperoleh 4 nilai *state feedback gain*, sebagai berikut :

Aturan 1 : **If** $x_2(t)$ is M_1 (0 rad) **AND** $|u(t)|$ is “high”

$$\text{then } u(t) = -K_1^1 x(t)$$

$$K_1^1 = [129.09 \quad -347.01 \quad 94.812 \quad -92.182]$$

Aturan 2 : **If** $x_2(t)$ is M_1 (0 rad) **AND** $|u(t)|$ is “low”

$$\text{then } u(t) = -K_2^1 x(t)$$

$$K_2^1 = [70.710 \quad -210.71 \quad 53.994 \quad -55.752]$$

Aturan 3 : **If** $x_2(t)$ is M_2 ($\pm 0,2$ rad) **AND** $|u(t)|$ is “high”

$$\text{then } u(t) = -K_1^2 x(t)$$

$$K_1^2 = [129.09 \quad -359.47 \quad 96.679 \quad -98.437]$$

Aturan 4 : **If** $x_2(t)$ is M_2 ($\pm 0,2$ rad) **AND** $|u(t)|$ is “low”

$$\text{then } u(t) = -K_2^2 x(t)$$

$$K_2^2 = [70.710 \quad -218.19 \quad 55.0758 \quad -59.547] \quad (3.26)$$

Pada perancangan kontroler menggunakan LQR, tahapan proses dapat dirangkum menjadi:

1. Memperoleh hasil definisi sistem pendulum kereta sesuai titik kerja. Titik kerja yang dipilih adalah pada saat sudut pendulum berada pada 0 radian dan ± 0.2 radian. Maka diperoleh hasil linearisasi berupa matriks A dan B pada masing masing titik kerja.

Titik kerja 1 (0 radian):

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2524 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,0319 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8272 \\ 1,2370 \end{bmatrix}$$

Titik kerja 2 ($\pm 0,2$ radian) :

$$\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2317 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,6874 & 0 & -0,0079 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8264 \\ 1,2111 \end{bmatrix}$$

2. Mendefinisikan indeks performansi, sehingga diperoleh kombinasi matrik Q dan R yang sesuai dengan sinyal kontrol yang diinginkan.

Indeks Performansi :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

Aturan fuzzy yang digunakan menggunakan konsep fuzzy PDC modifikasi dimana keluaran sinyal kontrol akan dikelompokkan kembali sesuai *range* yang telah ditentukan. Pada perancangan, aturan sinyal kontrol dibagi menjadi sinyal kontrol rendah dan sinyal kontrol tinggi. Sehingga terdapat 2 kombinasi Q dan R yang akan mewakili 2 kondisi tersebut.

Kombinasi Q dan R untuk sinyal kontrol:

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = [1]; R_2 = [0,3]$$

3. Memperoleh matriks P dengan menggunakan aljabar Riccati. Berdasarkan aturan kontroler pada Persamaan 3.16, terdapat 4 aturan maka akan diperoleh 4 buah matriks P yang mewakili masing-masing aturan.

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 10^3 x \begin{bmatrix} 0.9849 & -1.2507 & 0.4350 & -0.3165 \\ -1.2507 & 3.1091 & -0.9147 & 0.7305 \\ 0.4350 & -0.9147 & 0.3009 & -0.2264 \\ -0.3165 & 0.7305 & -0.2264 & 0.1833 \end{bmatrix}; \\
P_{12} &= 10^4 x \begin{bmatrix} 0.1770 & -0.3439 & 0.1067 & -0.0894 \\ -0.3439 & 2.2714 & -0.5192 & 0.5853 \\ 0.1067 & -0.5192 & 0.1537 & -0.1348 \\ -0.0894 & 0.5853 & -0.1348 & 0.1522 \end{bmatrix}; \\
P_{21} &= 10^3 x \begin{bmatrix} 0.9997 & -1.3240 & 0.4497 & -0.3473 \\ -1.3240 & 3.3619 & -0.9756 & 0.8246 \\ 0.4497 & -0.9756 & 0.3141 & -0.2508 \\ -0.3473 & 0.8246 & -0.2508 & 0.2146 \end{bmatrix}; \\
P_{22} &= 10^4 x \begin{bmatrix} 0.1787 & -0.3625 & 0.1097 & -0.0974 \\ -0.3625 & 2.4402 & -0.5503 & 0.6505 \\ 0.1097 & -0.5503 & 0.1590 & -0.1476 \\ -0.0974 & 0.6505 & -0.1476 & 0.1749 \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

4. Mmperoleh *state feedback gain* dari hasil matriks P ,

$$K = R^{-1} B^T P$$

sehingga diperoleh 4 *state feedback gain*:

$$K_1^1 = [129.09 \quad -347.01 \quad 94.812 \quad -92.182]$$

$$K_2^1 = [70.710 \quad -210.71 \quad 53.994 \quad -55.752]$$

$$K_1^2 = [129.09 \quad -359.47 \quad 96.679 \quad -98.437]$$

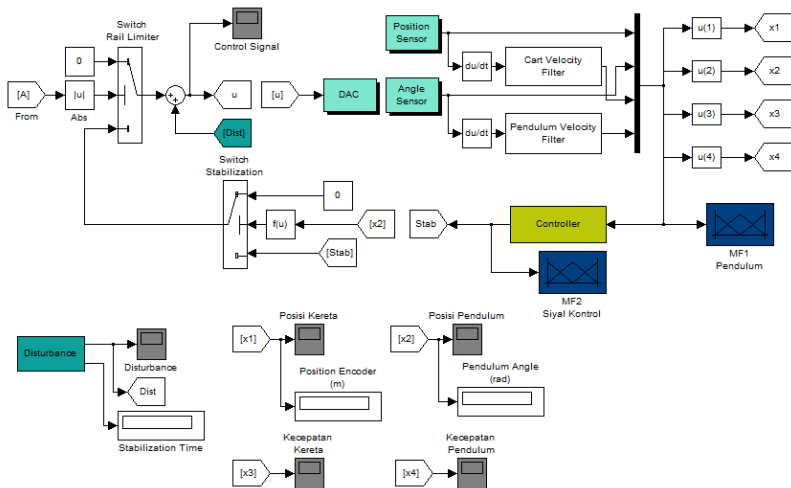
$$K_2^2 = [70.710 \quad -218.19 \quad 55.0758 \quad -59.547]$$

3.5 Diagram Simulink untuk Simulasi dan Implementasi

Sebelum diimplementasikan pada *plant* nyata sistem pendulum kereta, algoritma kontrol hasil desain disimulasikan terlebih dahulu dengan menggunakan Simulink/MATLAB. Diagram Simulink sistem kontrol hasil desain untuk simulasi dan implementasi ditunjukkan pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5. Isi dari masing-masing blok pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5 dapat dilihat pada Lampiran B.2.

MF2 yang nantinya akan masuk ke dalam *function* blok kontroler untuk memperoleh sinyal kontrol yang diinginkan.

Pada simulasi, sinyal kontrol yang digunakan berupa gaya dalam satuan Newton. Sedangkan pada implementasi, sinyal kontrol berupa gaya dalam satuan Newton masuk ke dalam blok DAC untuk dikonversikan ke dalam tegangan dalam satuan Volt. Hubungan antara gaya dan tegangan diasumsikan linear dan dinyatakan dengan $V=1/9 u$. DAC yang digunakan bekerja pada $\pm 2,5$ Volt. Oleh karena itu, tegangan yang digunakan dibatasi pada $\pm 1,9$ Volt. Pada implementasi, blok *Rail Limiter* digunakan sebagai pengaman untuk membatasi posisi kereta pada $\pm 0,4$ m. Simulink implementasi dapat dilihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Diagram Simulink Sistem Kontrol Hasil Desain untuk Implementasi

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB IV

HASIL SIMULASI DAN IMPLEMENTASI

Pada Bab ini dilakukan pengujian simulasi dan implementasi sistem kontrol pada sistem pendulum kereta seperti yang telah dijelaskan pada Bab III. Sebelumnya akan dibahas mengenai beberapa variabel serta parameter yang akan digunakan dalam simulasi dan implementasi. Simulasi dilakukan dengan menggunakan *toolbox Simulink* pada MATLAB. Sedangkan pada implementasi, mekanisme pemberian kondisi awal dilakukan dengan menggunakan tangan (menaikan pendulum secara manual) dan dilepas pada sudut tertentu. Tahap implementasi akan diterapkan pada *plant* nyata, “*Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200*” dari Feedback Instruments Ltd. Untuk menguji hasil desain kontroler, dilakukan mekanisme pemberian gangguan pada simulasi dan implementasi, selain itu akan dilakukan perbandingan respon antara desain kontroler menggunakan PDC konvensional dan PDC modifikasi.

4.1 Variabel dan Parameter yang Digunakan

Untuk melakukan tahapan simulasi dan implementasi, diperlukan *state feedback gain* yang mewakili aturan kontroler. Aturan kontroler tersebut dirancang sesuai konsep PDC modifikasi, dimana sinyal kontrol yang diperoleh sesuai titik kerjanya akan dikelompokkan kembali menjadi *range* yang diinginkan. Pada tahap perancangan yang telah dijelaskan pada subbab 3.3 sinyal kontrol dibagi menjadi sinyal kontrol rendah dan sinyal kontrol tinggi.

Dalam merancang kontroler untuk mencari nilai *state feedback gain*, pengelompokkan tinggi rendahnya sinyal kontrol dipengaruhi oleh kombinasi matriks Q dan R sesuai dengan indeks performansi pada persamaan 2.38. Sehingga dibutuhkan kombinasi matriks yang tepat untuk dapat mewakili kondisi sinyal kontrol rendah dan sinyal kontrol tinggi.

Pemilihan kombinasi matriks Q dan R dilakukan secara *trial and error*, dari beberapa percobaan diperoleh 3 kombinasi matriks Q dan R . Pada proses *trial and error* diambil 3 percobaan, kemudian dilihat hasil respon sudut pendulum, posisi kereta dan sinyal kontrol dari ketiga percobaan tersebut lalu dibandingkan dan dipilih kombinasi Q dan R yang paling sesuai dengan spesifikasi yang diinginkan.

Tabel 4.1 Kombinasi Matriks Q dan R pada 3 Percobaan

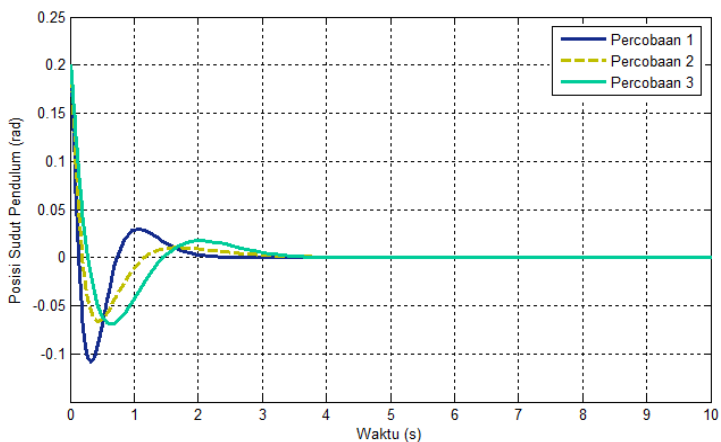
	Sinyal Kontrol Tinggi	Sinyal Kontrol Rendah
Percobaan 1	$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ $R = [0,3]$	$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ $R = [1]$
Percobaan 2	$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ $R = [0,3]$	$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ $R = [1]$
Percobaan 3	$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$ $R = [0,3]$	$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$ $R = [1]$

Tabel 4.2 Hasil *State Feedback Gain* pada 3 Percobaan

	Percobaan 1	Percobaan 2	Percobaan 3
K_1^1	[129 -347.0 94.8 -92.1]	[57.7 -336.7 74.1 -89.0]	[40.8 -236.8 49.2 -79.8]
K_2^1	[70.1 -210.7 53.9 -55.7]	[31.6 -198.1 41.2 -52.2]	[22.3 -155.1 27.4 -46.1]
K_1^2	[129 -359.4 96.6 -98.4]	[57.7 -347.1 75.0 -94.6]	[40.8 -267.8 49.7 -82.7]
K_2^2	[70.7 -218.1 55.0 -59.5]	[31.6 -203.9 41.7 -55.5]	[22.3 -157.5 27.6 -47.8]

Setelah diperoleh *state feedback gain* dari masing-masing percobaan, dapat diketahui respon dari sudut pendulum, posisi kereta, kecepatan pendulum, kecepatan kereta serta sinyal kontrol dengan diberikan kombinasi matriks Q dan R yang bervariasi.

Respon sudut pendulum dapat dilihat pada Gambar 4.1, serta perbandingan nilai *overshoot*, *undershoot* dan kondisi *steady state* pada sudut pendulum dapat dilihat pada Tabel 4.3. Percobaan 1 memiliki *overshoot* dan *undershoot* yang paling besar jika dibandingkan dengan percobaan 2 dan 3, tetapi memiliki respon yang paling cepat mencapai kondisi *steady state* dibandingkan dengan kedua percobaan tersebut. Pada percobaan ke-1 sudut pendulum membutuhkan waktu 2,054 detik untuk stabil mencapai titik 0 derajat. Sedangkan percobaan ke-2 dan percobaan ke-3 berturut-turut membutuhkan waktu 2,94 detik dan 3,29 detik.



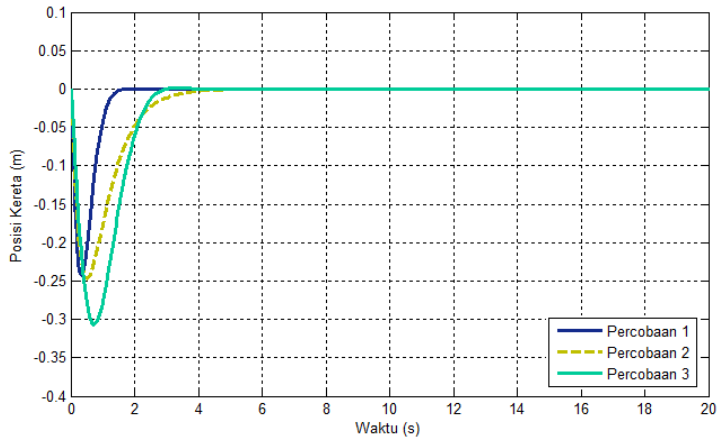
Gambar 4.1 Respon Sudut pendulum 3 Percobaan Kombinasi Matriks

Tabel 4.3 Perbandingan Nilai Respon Sudut pendulum 3 Percobaan Kombinasi Matriks

	<i>Undershoot</i>	<i>Overshoot</i>	<i>Steady State</i> (detik ke-)
Percobaan 1	-0,1086	0,03005	2,054
Percobaan 2	-0,06346	0,011	2,946
Percobaan 3	-0,6042	0,01735	3,29

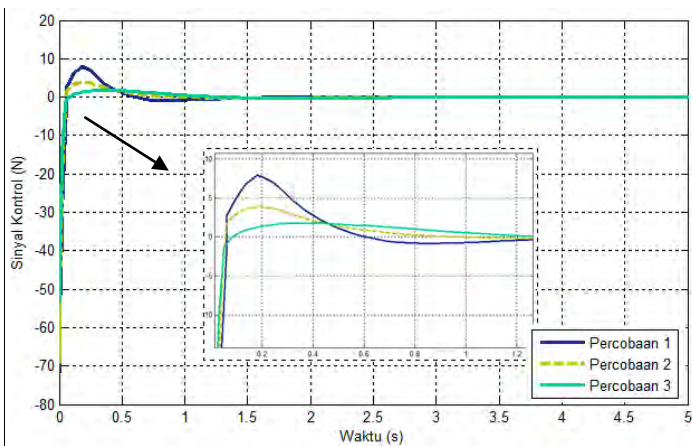
Respon posisi kereta dapat dilihat pada Gambar 4.2, dari ketiga percobaan dapat dilihat bahwa percobaan ke-3 memiliki *undershoot* yang paling besar yaitu 0,35 m. Apabila ketiga respon tersebut

dibandingkan berdasarkan waktu mencapai *steady state*, percobaan ke-1 memiliki waktu yang paling cepat mencapai keadaan *steady state* yaitu dalam waktu 1,683 detik. Sedangkan percobaan ke-2 memiliki waktu paling lama mencapai titik *steady state*, yaitu 4,28 detik.



Gambar 4.2 Respon Posisi Kereta 3 Percobaan Kombinasi Matriks

Hasil respon untuk sinyal kontrol berupa gaya yang diberikan pada kereta dalam satuan Newton (N) ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Sinyal Kontrol 3 Percobaan Kombinasi Matriks

Sinyal kontrol yang dihasilkan pada gambar menunjukkan bahwa percobaan ke-2 dan ke-3 memiliki *overshoot* lebih dari 1 N, sedangkan percobaan ke-3 tidak. Sinyal kontrol *maximum* dan *minimum* percobaan ke-1 dan ke-2 tidak begitu berbeda jauh, yaitu sekitar 5 N untuk sinyal kontrol *maximum* dan -70,8 N untuk sinyal kontrol *minimum*. Sedangkan untuk respon sinyal kontrol *maximum* percobaan ke-3 sebesar 0,24 N dan -53,39 N untuk sinyal kontrol *minimum*. Dari ketiga respon tersebut, percobaan ke-1 memiliki respon yang paling cepat mencapai kondisi *steady state* yaitu pada waktu 0,7 detik. Perbandingan nilai *overshoot*, *undershoot* dan kondisi *steady state* pada posisi kereta dan sinyal kontrol berturut-turut dapat dilihat pada Tabel 4.4 dan Tabel 4.5.

Tabel 4.4 Perbandingan Nilai Hasil Respon Posisi Kereta 3 Percobaan Kombinasi Matriks

	<i>Undershoot</i> (m)	<i>Steady State</i> (detik ke-)
Percobaan 1	-0,3203	1,693
Percobaan 2	-0,5739	4,821
Percobaan 3	-0,6907	3,132

Tabel 4.5 Perbandingan Nilai Sinyal kontrol 3 Percobaan Kombinasi Matriks

	<i>Undershoot</i>	<i>Overshoot</i>	<i>Steady State</i> (detik ke-)
Percobaan 1	-71,49	8,653	0,658
Percobaan 2	-68,85	3,897	1,172
Percobaan 3	-53,39	1,584	1,405

Dari ketiga percobaan dapat disimpulkan bahwa kombinasi matriks Q dan R pada percobaan ke-1 menghasilkan respon yang diinginkan, yaitu sinyal kontrol, respon sudut pendulum dan posisi kereta mencapai kondisi *steady state* lebih cepat dibandingkan dengan percobaan ke-2 dan ke-3. Tetapi dari ketiga percobaan tersebut, sinyal kontrol yang dibutuhkan pada percobaan ke-1 memiliki *overshoot* dan sinyal kontrol *minimum* yang lebih tinggi dibandingkan percobaan ke-2 dan percobaan ke-3, yaitu *overshoot* sebesar 7,8 N pada saat 0,19 detik dan 71,49 N untuk sinyal kontrol *minimum*.

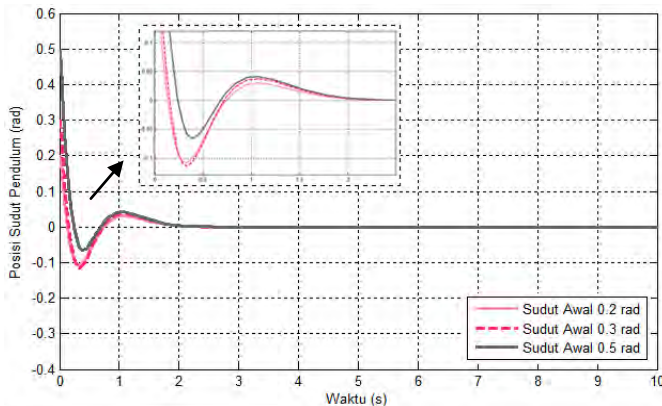
Dari hasil respon dan perbandingan besarnya *overshoot*, *undershoot*, serta waktu untuk mencapai kondisi *steady state* dapat disimpulkan bahwa percobaan 1 merupakan kombinasi Q dan R yang paling sesuai, yaitu waktu posisi kereta dan sudut pendulum saat mencapai kondisi *steady state*.

4.2 Hasil Simulasi

Pengujian sistem kontrol hasil desain disimulasikan dengan menggunakan *software* Simulink/MATLAB R2009a. Diagram blok yang digunakan dapat dilihat pada Gambar 3.4 dengan model gaya gesek diabaikan. Pada subbab ini akan ditunjukkan hasil simulasi untuk kondisi awal yang berbeda, pemberian gangguan pada sistem, dan perbandingan antara PDC modifikasi dengan PDC konvensional.

4.2.1 Hasil Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal

Pada simulasi nilai *state feedback gain* yang digunakan sesuai dengan Persamaan (3.21). Pengujian dilakukan dengan memberikan kondisi awal sudut pendulum yang bervariasi yaitu 0,2 rad, 0,3 rad dan 0,5 rad. Sedangkan kondisi awal untuk *state* posisi kereta, kecepatan kereta, dan kecepatan sudut pendulum adalah 0. Respon sudut pendulum untuk tiga kondisi awal berbeda dapat dilihat pada Gambar 4.4.



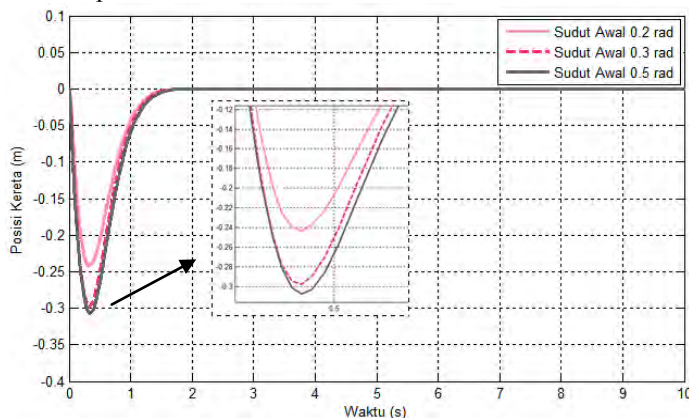
Gambar 4.4 Respon Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

Ketiga respon tersebut menunjukkan bahwa pendulum stabil pada sudut 0 rad setelah 2,258 detik dengan *peak time* sekitar 0,3 detik. *Maximum undershoot* pada sudut awal 0,2 rad terjadi pada sudut pendulum sekitar 0,114 rad, untuk sudut awal 0,3 rad di sekitar 0,108 rad, sedangkan pada sudut awal 0,5 rad terjadi di 0,065 rad. Ketiganya memiliki *overshoot* yang sangat kecil pada waktu 1,049 detik, yaitu sekitar 0,02 rad pada posisi sudut awal 0,2 rad dan 0,3 rad. Sedangkan pada posisi sudut awal 0,5 rad, *overshoot* terjadi pada 0,04 rad. Perbandingan nilai *overshoot*, *undershoot* dan kondisi *steady state* pada sudut pendulum dengan berbagai kondisi awal sudut yang berbeda dapat dilihat pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Perbandingan Nilai Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal.

Sudut Awal	<i>Undershoot</i>	<i>Overshoot</i>	<i>Steady State</i> (detik ke-)
0,2 rad	-0,108	0,0296	2,258
0,3 rad	-0,1144	0,03733	2,258
0,5 rad	-0,065	0,0408	2,258

Respon posisi kereta dalam satuan meter untuk tiga kondisi sudut awal pendulum ditunjukkan pada Gambar 4.5 dan perbandingan nilai dapat dilihat pada Tabel 4.7.



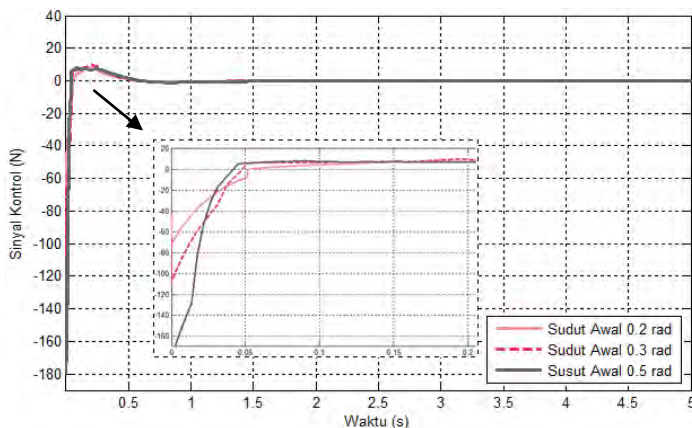
Gambar 4.5 Respon Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

Dapat dilihat bahwa respon posisi kereta saat sudut awal 0,3 rad dan 0,5 rad memiliki nilai *maximum undershoot* yang lebih besar dibandingkan respon posisi kereta saat kondisi awal sudut pendulum 0,2 rad yaitu sekitar 0,3 m pada saat 0,355 detik. Sedangkan respon sudut awal 0,2 rad memiliki bentuk yang mirip dengan *maximum undershoot* di sekitar 0,33 detik, *maximum undershoot* pada posisi kereta 0,24 m.

Tabel 4.7 Perbandingan Nilai Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal.

Sudut Awal	<i>Undershoot</i>	<i>Steady State</i> (detik ke-)
0,2 rad	-0,243	0,658
0,3 rad	-0,297	1,172
0,5 rad	-0,307	1,405

Hasil sinyal kontrol berupa gaya dalam satuan Newton ditunjukkan pada Gambar 4.6 dan perbandingan nilai dari hasil respon dapat dilihat pada Tabel 4.8. Untuk sudut awal 0,2 rad didapat sinyal kontrol *minimum* dan *maximum* berturut-turut adalah -72,83 N dan 8,3 N. Untuk sudut awal 0,3 rad didapat sinyal kontrol *minimum* dan *maximum* berturut-turut adalah -105 N dan 7 N. Sedangkan untuk sudut awal 0,5 rad didapat sinyal kontrol *minimum* dan *maximum* berturut-turut adalah -177,7 N dan 7,6 N.



Gambar 4.6 Sinyal Kontrol pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

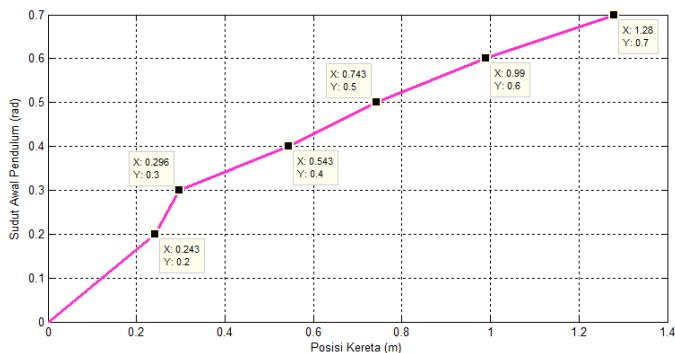
Tabel 4.8 Perbandingan Nilai Sinyal Kontrol dengan Berbagai Kondisi Awal.

Sudut Awal	<i>Undershoot</i>	<i>Overshoot</i>	<i>Steady State</i> (detik ke-)
0,2 rad	-72,83	9,751	0,48
0,3 rad	-105	11,495	0,5
0,5 rad	-177,7	6,82	0,56

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.5 dapat disimpulkan bahwa kontroler yang dirancang mampu menstabilkan pendulum pada sudut 0 rad. Nilai perbandingan besarnya *undershoot*, *overshoot* dan waktu saat mencapai kondisi *steady state* ditunjukkan pada Tabel 4.6 sampai Tabel 4.8, dimana dari masing-masing tabel tersebut dapat dilihat bahwa penentuan kondisi awal pendulum akan mempengaruhi besarnya simpangan posisi kereta terhadap titik tengah rel dan batas maksimum serta minimum pada sinyal kontrol.

4.2.2 Hasil Simulasi Perbandingan Sudut Awal Pendulum dengan Simpangan Posisi Kereta

Respon besarnya simpangan posisi kereta dari titik tengah rel dipengaruhi dari sudut awal pendulum. Semakin besar sudut awal pendulum, maka simpangan posisi kereta dari titik tengah rel akan semakin besar. Simulasi dilakukan dengan mengabaikan kecepatan kereta. Respon perbandingan antara sudut awal pendulum dengan besarnya simpangan posisi kereta dapat dilihat pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Respon Perbandingan antara Sudut Awal Pendulum dengan Besar Simpangan Posisi Kereta

Besarnya nilai simpangan posisi kereta terhadap titik tengah rel dengan sudut awal pendulum dapat dilihat pada Tabel 4.9

Tabel 4.9 Perbandingan Nilai antara Sudut Awal Pendulum dengan Besar Simpangan Posisi Kereta

Sudut Awal Pendulum (rad)	Simpangan Posisi Kereta dari Titik Tengah Rel (m)
0,2	0,243
0,3	0,296
0,4	0,543
0,5	0,743
0,6	0,99
0,7	1,28

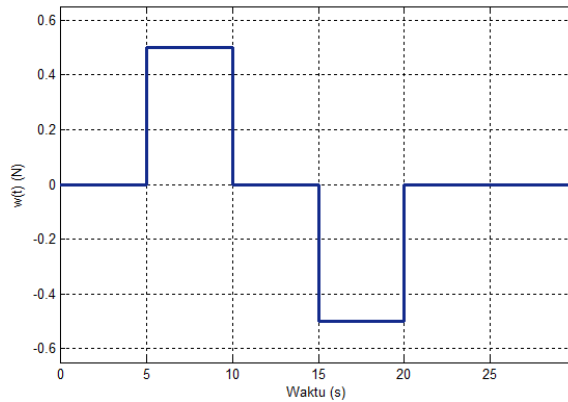
Pada Tabel 4.9 dapat dilihat bahwa semakin besar sudut awal pendulum maka simpangan posisi kereta terhadap titik tengah rel akan semakin jauh.

4.2.3 Hasil Simulasi dengan Gangguan

Berikut ini dilakukan simulasi pengujian dengan memberikan gangguan pada sistem. Gangguan $w(t)$ yang diberikan diilustrasikan seperti pada Gambar 4.8 dan dapat dituliskan dalam bentuk matematika sebagai berikut :

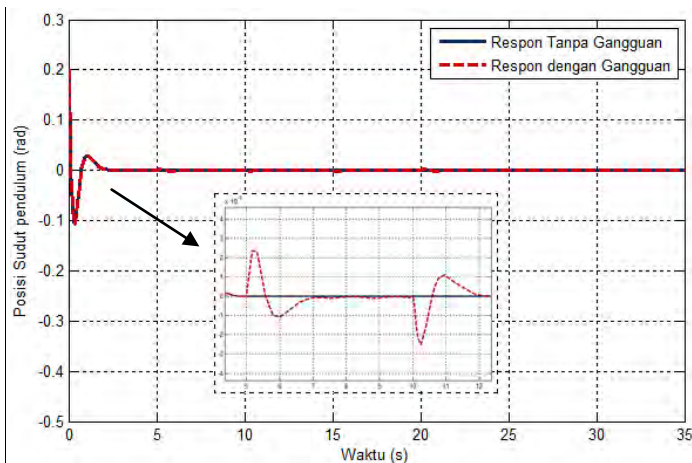
$$w(t) = \begin{cases} 0,5N, & 5 \leq t \leq 10 \\ -0,5N, & 15 \leq t \leq 20 \\ 0N, & etc. \end{cases}$$

Gangguan diberikan pada sistem sebesar 0,5 N pada detik ke-5 sampai detik ke-10 dan -0,5 N pada detik ke-15 sampai detik ke-20. Bentuk respon gangguan $w(t)$ yang diberikan dapat dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Gangguan $w(t)$ pada Simulasi

Respon sudut pendulum dalam satuan rad yang telah diberi gangguan $w(t)$ dapat dilihat pada Gambar 4.9.

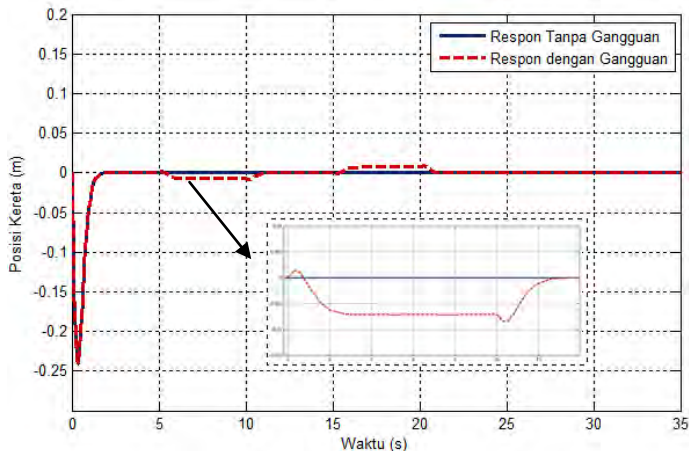


Gambar 4.9 Respon Sudut Pendulum dengan Gangguan

Ketika sistem diberi gangguan sebesar 0,5 N pada detik ke-5, posisi batang pendulum bergeser 0,009 rad dan pada detik ke-7 posisi batang pendulum kembali ke posisi sudut 0 rad. Pada saat gangguan dilepas di detik ke-10 posisi batang pendulum bergeser -0,008 rad, dan

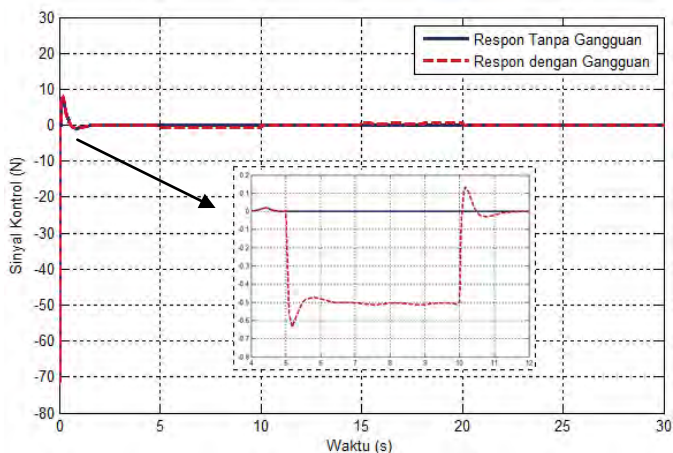
pada detik ke-12 posisi batang pendulum kembali ke sudut 0 rad. Dan hal tersebut juga terjadi pada saat sistem diberi gangguan sebesar -0,5 N pada detik ke-15, posisi batang pendulum bergeser -0,008 rad dan pada detik ke-17 posisi batang pendulum kembali ke posisi sudut 0 rad. Pada saat gangguan dilepas di detik ke-20 posisi batang pendulum bergeser 0,008 rad, dan pada detik ke-17 posisi batang pendulum kembali ke sudut 0 rad.

Respon posisi kereta yang telah diberi gangguan $w(t)$ dalam satuan meter ditunjukkan pada Gambar 4.10. Ketika sistem diberi gangguan pada detik ke-5, kereta akan bergerak ke kiri sebesar 0,1 m yang menandakan bahwa sistem melawan gangguan 0,5 N yang diberikan. Ketika gangguan dilepas pada detik ke-10, kereta kembali menuju titik tengah rel yang menandakan sistem mampu kembali ke kondisi awalnya. Begitupun sebaliknya, ketika sistem diberi gangguan kembali pada detik ke-15, kereta akan bergerak ke kanan sebesar 0,1 m yang menandakan bahwa sistem melawan gangguan -0,5 N yang diberikan. Ketika gangguan dilepas pada detik ke-20, kereta akan kembali menuju titik tengah rel.



Gambar 4.10 Respon Posisi Kereta dengan Gangguan

Hasil sinyal kontrol berupa gaya dalam satuan Newton yang telah diberi gangguan sebesar 0,5 N ditunjukkan pada Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Sinyal Kontrol dengan Gangguan

Sinyal kontrol diberi gangguan sebesar 0,5 N pada detik ke-5 kemudian dilepas pada detik ke-10 dan -0,5 N pada detik ke-15 kemudian dilepas pada detik ke-20. Sinyal kontrol akan bergeser sebesar -0,66 N pada saat sistem diberi gangguan sebesar 0,5 N dan saat sistem diberi gangguan sebesar -0,5 N, sinyal kontrol bergeser sebesar 0,688 N. Dapat disimpulkan bahwa pada saat sistem diberi gangguan, sinyal kontrol merespon dengan memberikan gaya yang berlawanan untuk melawan gangguan sehingga sistem dapat tetap stabil terhadap gangguan yang diberikan. Perbandingan nilai respon posisi kereta, sudut pendulum dan sinyal kontrol dapat dilihat pada Tabel 4.10.

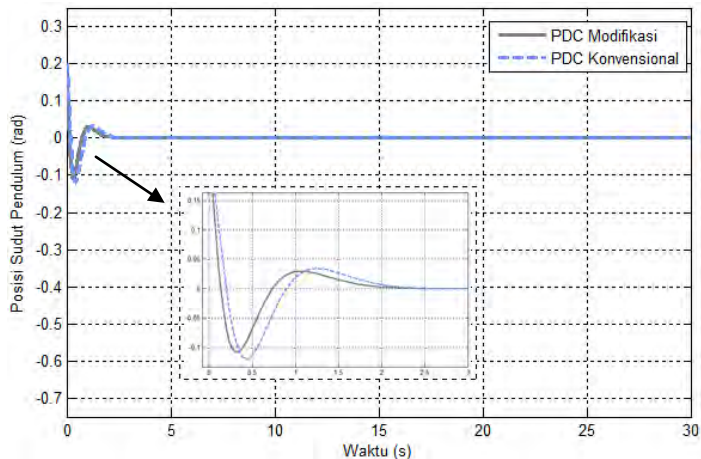
Tabel 4.10 Perbandingan Nilai Respon Simulasi saat Gangguan

	Gangguan detik ke 5-10		Gangguan detik ke 15-20	
	Besar Simpangan	<i>Steady State</i> (detik ke-)	Besar Simpangan	<i>Steady State</i> (detik ke-)
Posisi Kereta	-0,00711 m	6,6 s	0,0071 m	16,78 s
Sudut pendulum	0,0023 rad	7 s	-0,0023 rad	16,2 s
Sinyal Kontrol	-0,5 N	6,5 s	0,5 N	16,5 s

Berdasarkan gambar hasil respon serta tabel perbandingan nilai besarnya hasil simpangan batang pendulum dan kereta, dapat dilihat bahwa pada saat diberi gangguan sebesar 0,5 N di detik ke-5 sampai detik ke-10, posisi dan sudut pendulum bergeser sangat kecil sekali tetapi akan kembali pada posisi 0 rad untuk sudut pendulum. Pada posisi kereta, respon menunjukkan bahwa pada saat diberi gangguan maka kereta akan menyimpang sebesar $\pm 0,007$ m selama waktu gangguan yang ditentukan, tetapi saat gangguan dilepas maka kereta akan kembali ke titik tengah rel. Hal ini menunjukkan bahwa sistem kontrol yang dirancang mampu menjaga kestabilan sistem saat diberi gangguan sebesar 0,5 N.

4.2.4 Hasil Simulasi Perbandingan PDC Modifikasi dengan PDC Konvensional

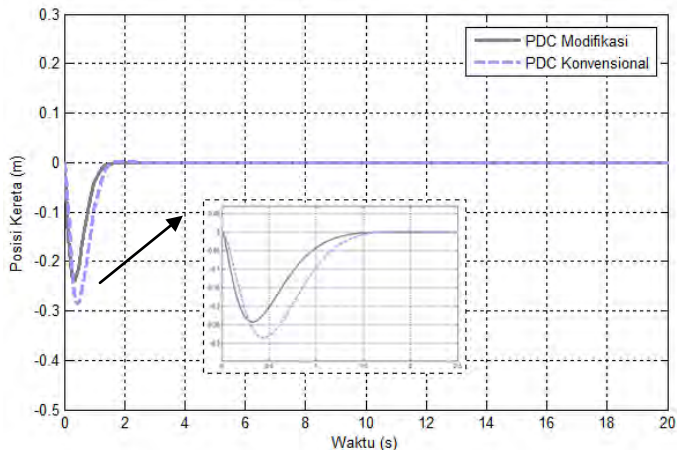
Hasil simulasi respon pada saat sistem pendulum-kereta bekerja dengan menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi dan aturan kontrol PDC konvensional ditunjukkan pada Gambar 4.12 untuk sudut pendulum, Gambar 4.13 untuk posisi kereta, dan Gambar 4.14 untuk sinyal kontrol. Simulasi dilakukan dengan *initial condition* dari sudut pendulum 0,2 rad. Perbandingan respon posisi sudut dengan menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi dan PDC konvensional ditunjukkan pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Respon Sudut Pendulum PDC Modifikasi dan PDC Konvensional

Dapat dilihat bahwa hasil respon dengan menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi memiliki respon yang lebih cepat untuk mencapai posisi 0 derajat, yaitu 4,36 detik. Sedangkan apabila menggunakan aturan kontrol PDC konvensional dibutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai sudut pendulum sebesar 0 derajat, yaitu 5,64 detik. *Maximum undershoot* yang terjadi pada respon posisi sudut dengan menggunakan PDC modifikasi pun lebih kecil dari PDC konvensional, yaitu 0,005 rad untuk PDC modifikasi dan 0,07 untuk PDC konvensional.

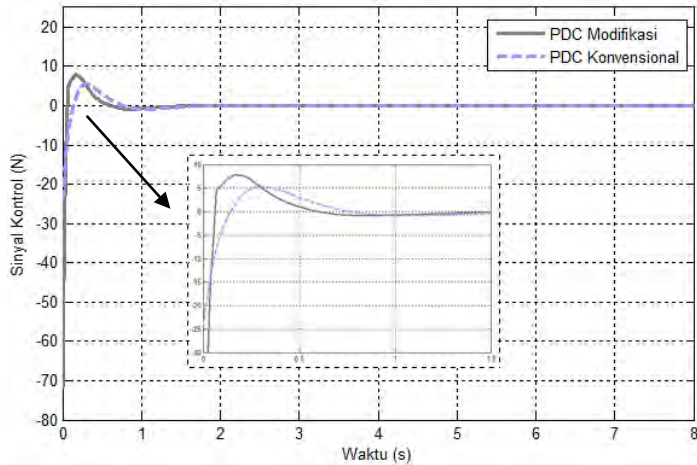
Dari hasil simulasi respon posisi kereta pada Gambar 4.13 menunjukkan bahwa respon posisi kereta dengan menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi lebih cepat kembali ke titik tengah rel dibandingkan dengan menggunakan aturan kontrol PDC konvensional. Pada respon posisi kereta menggunakan PDC konvensional, terdapat *overshoot* pada detik ke-5,48 dan posisi kereta mencapai daerah *minimum*, yaitu -0,4 m. Sedangkan respon posisi kereta menggunakan PDC modifikasi, tidak terdapat *overshoot*, dan *maximum undershoot* 0,2 m terjadi pada detik ke-0,75.



Gambar 4.13 Respon Posisi Kereta PDC Modifikasi dan PDC Konvensional

Hasil perbandingan simulasi sinyal kontrol menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi dan PDC konvensional ditunjukkan pada Gambar 4.14. Dapat dilihat bahwa hasil respon dengan menggunakan aturan kontrol PDC modifikasi membutuhkan sinyal kontrol yang cukup

besar, yaitu sinyal kontrol *minimum* sebesar 30,1 N dan sinyal kontrol *maximum* 2,5 N. Sedangkan apabila menggunakan aturan kontrol PDC konvensional membutuhkan sinyal kontrol *minimum* sebesar 7,24 N dan sinyal kontrol *maximum* 1,259 N.



Gambar 4.14 Sinyal Kontrol PDC Modifikasi dan PDC Konvensional

Tabel 4.11 Tabel Perbandingan Nilai antara PDC Konvensional dan PDC Modifikasi

	PDC Konvensional			PDC Modifikasi		
	<i>Under shoot</i>	<i>Over shoot</i>	<i>Steady State</i>	<i>Under shoot</i>	<i>Over shoot</i>	<i>Steady State</i>
Posisi Kereta	-0,2847	0	1,569	-0,2431	0	1,461
Sudut Pendulum	-0,1199	0,0347	2,132	-0,1053	0,1199	1,978
Sinyal Kontrol	-23,94	5,424	0,8382	-71,56	7,796	0,6576

Dari ketiga respon tersebut dapat disimpulkan bahwa apabila sistem pendulum kereta dirancang dengan menggunakan konsep aturan PDC modifikasi maka akan menghasilkan respon sudut pendulum, serta posisi kereta yang lebih cepat menuju kondisi *steady state* dibandingkan dengan menggunakan konsep aturan PDC konvensional. Tetapi pada

sinyal kontrol, PDC modifikasi membutuhkan respon yang lebih besar dibandingkan sinyal kontrol yang dibutuhkan oleh PDC konvensional.

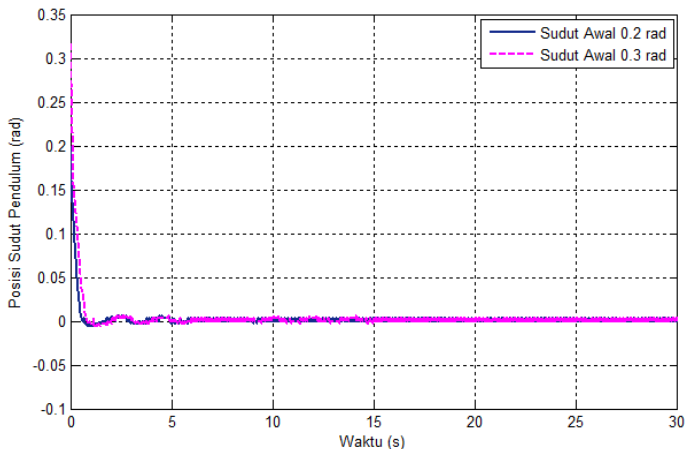
4.3 Hasil Implementasi

Implementasi dilakukan pada *plant* nyata “Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200” dengan menggunakan *software* Simulink/MATLAB 6.5.1. Diagram blok yang digunakan pada Simulink sesuai dengan Gambar 3.5 sedangkan nilai *gain state-feedback* yang digunakan sesuai dengan Persamaan (3.45). Pada subbab ini akan ditunjukkan hasil implementasi untuk kondisi awal yang berbeda serta pemberian gangguan pada sistem.

4.3.1 Hasil Implementasi Berbagai Kondisi Awal

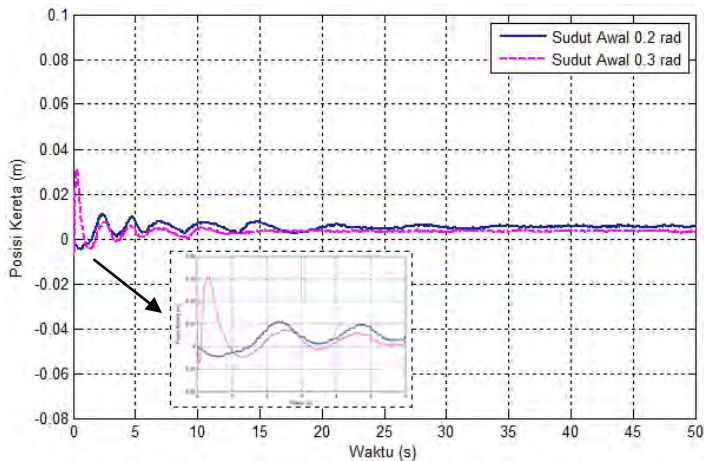
Pada implementasi ini dilakukan pengujian dengan kondisi awal sudut pendulum adalah 0,2 rad dan 0,3 rad sedangkan *state* yang lain memiliki kondisi awal 0. Pemberian kondisi awal pada sudut pendulum dilakukan dengan cara mengangkat pendulum secara manual.

Respons sudut pendulum dalam satuan radian ditunjukkan seperti pada Gambar 4.15, sedangkan respons posisi kereta dalam satuan meter ditunjukkan pada Gambar 4.16.



Gambar 4.15 Respons Sudut Pendulum pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal

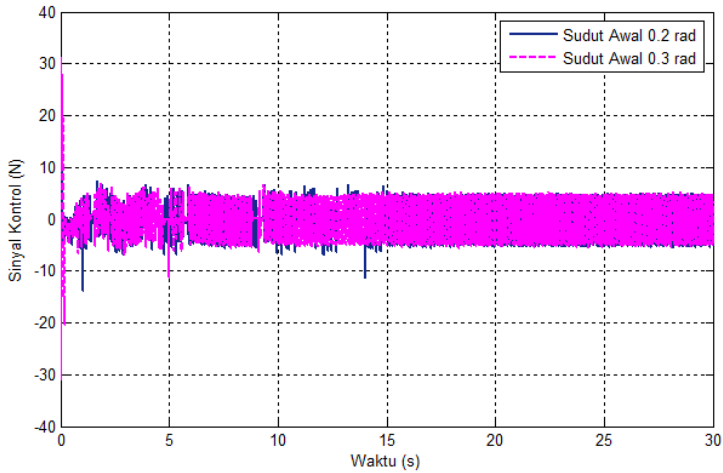
Respon dengan sudut awal 0,3 rad akan lebih cepat menuju kondisi *steady state* dibandingkan dengan sudut awal 0,2 rad, hal ini dikarenakan *angle encoder* akan lebih cepat mendeteksi sudut awal yang diberikan. Pada sudut awal 0,3 rad, saat batang pendulum dinaikan dan posisi batang pendulum masuk ke sekitar 0,3 rad maka sinyal kontrol akan langsung mengirimkan sinyal untuk menstabilkan pendulum ke posisi 0 rad, sehingga pada saat sudut awal 0,3 rad sinyal kontrol akan lebih cepat merespon. Dapat dilihat pada Gambar 4.15, dari kedua kondisi sudut awal yang berbeda batang pendulum mampu mencapai kondisi stabil 0 rad.



Gambar 4.16 Respon Posisi Kereta pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal

Sinyal kontrol yang dihasilkan dalam satuan Newton dapat dilihat pada Gambar 4.17. Untuk sudut awal 0,2 rad didapat sinyal kontrol minimal dan maksimal berturut-turut adalah -13,3 N dan 24,4 N. Sedangkan untuk sudut awal 0,3 rad didapat sinyal kontrol minimal dan maksimal berturut-turut adalah -20,6 N dan 32,9 N.

Pada saat pendulum stabil pada sudut 0 rad, sinyal kontrol berosilasi antara $\pm 8,8$ N untuk mempertahankan pendulum pada posisi terbalik.



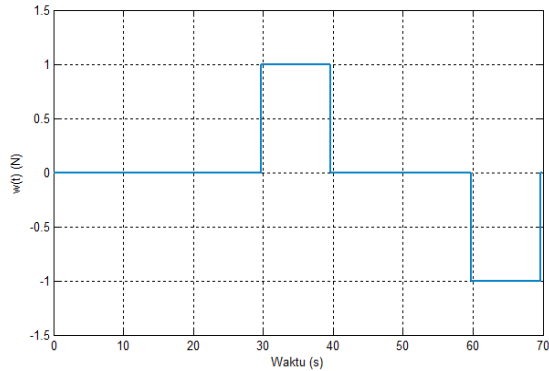
Gambar 4.17 Sinyal Kontrol pada Implementasi dengan Berbagai Kondisi Awal

Dari Gambar 4.15 hingga Gambar 4.17 dapat disimpulkan bahwa kontroler yang dirancang mampu menstabilkan pendulum pada sudut 0 rad dan menjaga kereta di titik tengah rel pada implementasi nyata. Hasil yang didapat pada implementasi hampir menyerupai hasil yang didapat pada simulasi saat sudut pendulum berada pada sudut 0 rad.

4.3.2 Hasil Implementasi dengan Gangguan

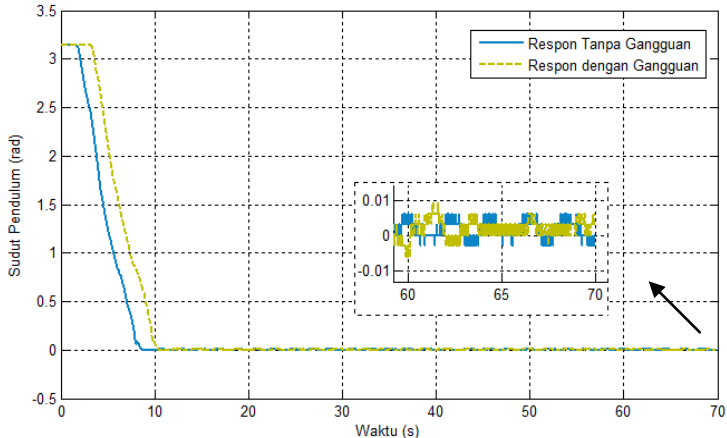
Implementasi berikut dilakukan dengan memberi gangguan pada sistem seperti yang telah dilakukan pada simulasi. Gangguan $w(t)$ yang diberikan pada pengujian ini diilustrasikan seperti pada Gambar 4.18 dan dapat dituliskan dalam bentuk matematika sebagai berikut:

$$w(t) = \begin{cases} 0,5N, & 5 \leq t \leq 10 \\ -0,5N, & 15 \leq t \leq 20 \\ 0N, & \text{etc.} \end{cases}$$



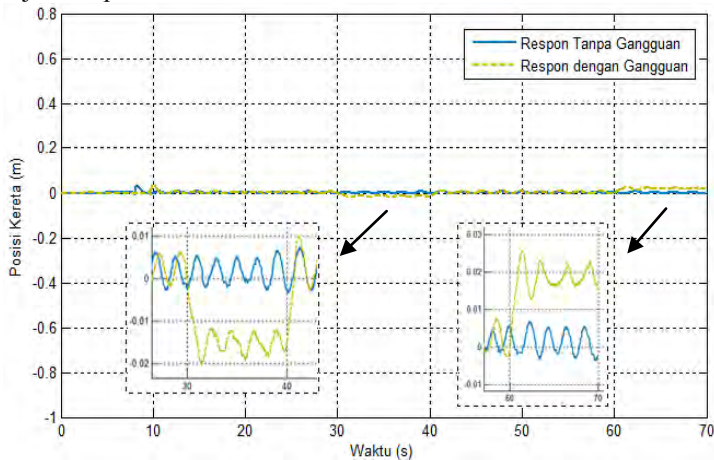
Gambar 4.18 Gangguan $w(t)$ pada Implementasi

Ketika sistem diberi gangguan pada detik ke-30, terlihat bahwa sudut pendulum menyimpang sebesar 0,016 rad dan kembali menuju 0 rad pada detik ke- 32. Ketika gangguan dilepas pada detik ke-40, sudut pendulum menyimpang sebesar -0,01 rad dan kembali menuju 0 rad. Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem tetap mampu menjaga kestabilan pendulum ketika sistem diberi gangguan. Respons sudut pendulum dan posisi kereta ditunjukkan pada Gambar 4.19 dan Gambar 4.20.



Gambar 4.19 Respon Sudut Pendulum pada Implementasi dengan Gangguan

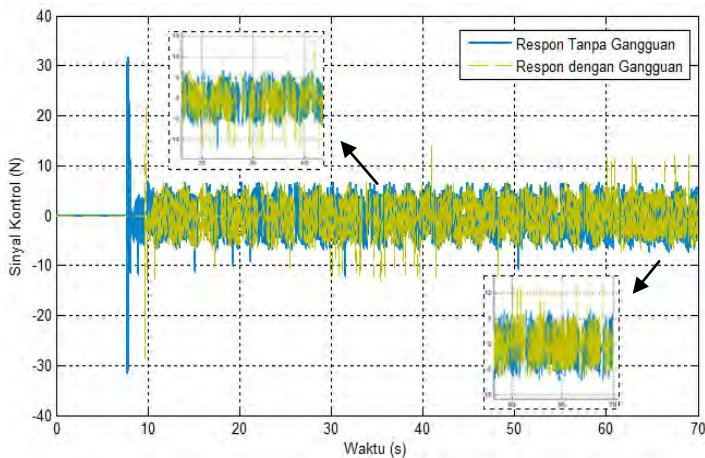
Ketika sistem diberi gangguan pada detik ke-30, kereta bergerak ke kiri yang menandakan bahwa sistem melawan gangguan 1N yang diberikan. Ketika gangguan dilepas pada detik ke-40, kereta kembali menuju titik tengah rel yang menandakan sistem mampu kembali ke kondisi awalnya. Simpangan posisi kereta saat diberi gangguan adalah $\pm 0,019$ m yaitu ketika sistem pertama kali diberi gangguan. Sinyal kontrol dalam satuan Newton pada saat diberi gangguan sebesar 0,5 N ditunjukkan pada Gambar 4.21.



Gambar 4.20 Respon Posisi Kereta pada Implementasi dengan Gangguan

Dari Gambar 4.21 dapat dilihat bahwa sinyal kontrol berosilasi di sekitar ± 5 N. Pada saat sistem diberi gangguan pada detik ke-30 dan detik ke- 40, maka sinyal kontrol akan bernilai -1 N untuk mengompensasi gangguan yang diberikan. Ketika gangguan dilepas pada detik ke-10 dan ke-20, sinyal kontrol akan bernilai 1 N untuk mengompensasi gangguan yang dilepas.

Kompensasi yang diberikan tidak tampak karena besar osilasi yang terjadi lebih besar daripada besar kompensasi. Osilasi ini terjadi karena pada implementasi nyata tidak mudah untuk menstabilkan pendulum pada sudut 0 rad, sehingga sinyal kontrol akan berosilasi terus-menerus.



Gambar 4.21 Sinyal Kontrol pada Implementasi dengan dengan Gangguan

Tabel 4.12 Perbandingan Nilai Respon Simulasi saat Gangguan

	Gangguan detik ke 30-40		Gangguan detik ke 60-70	
	Besar Simpangan	<i>Steady State</i> (detik ke-)	Besar Simpangan	<i>Steady State</i> (detik ke-)
Posisi Kereta	-0,0194 m	31,39 s	0,0194 m	62,78
Sudut pendulum	0,008 rad	32,8 s	-0,0083 rad	63,1
Sinyal Kontrol	-12,5 N	30,8 s	12,5 N	61,5

Dari hasil implementasi pada Gambar 4.15 hingga Gambar 4.21 dapat disimpulkan bahwa kontroler hasil desain mampu mempertahankan pendulum pada sudut 0 rad dan kereta pada titik tengah rel. Ketika sistem diberi gangguan sebesar ± 1 N, Pada posisi kereta, respon menunjukkan bahwa pada saat diberi gangguan maka kereta akan menyimpang sebesar $\pm 0,194$ m selama waktu gangguan yang ditentukan, tetapi saat gangguan dilepas maka kereta akan kembali ke titik tengah rel. Hal ini menunjukkan bahwa kontroler yang dirancang mampu menjaga kestabilan sistem saat diberi gangguan sebesar ± 1 N.

BAB V

PENUTUP

Dari hasil pengujian sistem kontrol hasil desain baik dengan simulasi maupun implementasi pada *plant* nyata dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu :

1. Kontrol *fuzzy* T-S melalui pendekatan PDC modifikasi mampu menstabilkan pendulum pada posisi terbalik dan mempertahankan kereta pada titik tengah rel dengan waktu mencapai steady state lebih cepat dibandingkan dengan PDC konvensional, yaitu 0,108 detik lebih cepat untuk respon posisi kereta dan 0,2 detik lebih cepat untuk respon sudut pendulum.
2. Kontroler yang dirancang mampu mempertahankan sudut pendulum dan posisi kereta sesuai yang diinginkan pada saat sistem diberi gangguan pada simulasi serta implementasi dengan gangguan sebesar $\pm 0,5N$ hingga $\pm 1N$.
3. Penentuan kondisi sudut awal pada sudut pendulum mempengaruhi pergerakan pada kereta. Dengan titik kerja 0 dan $\pm 0,2$ rad, saat sudut pendulum diberikan kondisi awal yang lebih dari 0,4 rad kereta tidak mampu menstabilkan posisi pendulum karena sinyal kontrol yang diberikan terlalu besar sehingga pergerakan kereta melebihi batas maksimum yaitu 0,4 meter.

Untuk pengembangan penelitian selanjutnya penulis menyarankan agar model gaya gesek tidak diabaikan sehingga didapat hasil simulasi yang lebih baik.

Halaman ini sengaja dikosongkan

LAMPIRAN A

A.1 Penurunan Persamaan *State* Sistem Pendulum Kereta

Persamaan *state* Sistem Pendulum-Kereta dapat diperoleh dari analisis gerak sesuai hukum kedua Newton. Analisa hukum Newton ditinjau dari persamaan gerak translasi dan rotasi.

Persamaan gerak translasi pada bidang horizontal adalah:

$$\sum F_x = ma_x \quad (\text{A.1})$$

Dari Gambar 2.5(a), dapat dilihat bahwa gaya-gaya yang bekerja pada bidang horizontal adalah gaya kontrol u dan gaya gesek T_c . Massa keseluruhan sistem (m) adalah jumlah dari massa kereta (m_c) dan massa pendulum (m_p). Percepatan pusat massa pada bidang horizontal adalah

$$a_x = (\dot{x}_1 - l \sin x_2)'' \quad (\text{A.2})$$

Dari (A.1) dan (A.2), diperoleh (2.1) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u - T_c &= (m_c + m_p)(\dot{x}_1 - l \sin x_2)'' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 l \sin x_2)' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 l \cos x_2 + (\dot{x}_2)^2 l \sin x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Persamaan gerak translasi pada bidang vertikal adalah:

$$\sum F_y = ma_y \quad (\text{A.4})$$

Dari Gambar 2.5(b), dapat dilihat bahwa gaya-gaya yang bekerja pada bidang vertikal adalah gaya normal V dan berat sistem, yaitu $(m_c + m_p)g$. Percepatan pusat massa pada bidang vertikal adalah

$$a_y = (l \cos x_2)'' \quad (\text{A.5})$$

Dari (A.4) dan (A.5), diperoleh (2.2) yang dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V - (m_c + m_p)g &= (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l\ddot{x}_2 \sin x_2)' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l\ddot{x}_2 \sin x_2 - l(\dot{x}_2)^2 \cos x_2) \\ V &= (m_c + m_p)(g - l\ddot{x}_2 \sin x_2 - l(\dot{x}_2)^2 \cos x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Persamaan gerak rotasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum \tau = J\alpha \quad (\text{A.7})$$

Dengan α adalah percepatan sudut dan τ adalah torsi yang bekerja pada sistem. Dari Gambar 2.5(c), (A.7) dapat dijabarkan sehingga diperoleh persamaan gerak rotasi sesuai dengan (2.3), yaitu

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p = Jx_2''$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - f_p x_4 = Jx_2'' \quad (\text{A.8})$$

dengan D_p adalah momen gesek akibat gerak putar pendulum.

Dinamika *state* x_4 dapat diperoleh dengan melakukan substitusi (A.6) ke (A.8) sebagai berikut:

$$Jx_2'' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + (m_c + m_p)(g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2)l \sin x_2 \quad (\text{A.9})$$

Dengan mendefinisikan $\mu = (m_c + m_p)l$, maka diperoleh

$$Jx_4' = (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + (m_c + m_p)l(g \sin x_2 - lx_4' \sin^2 x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2 \sin x_2)$$

$$Jx_4' = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - \mu lx_4' \sin^2 x_2 - f_p x_4$$

$$x_4'(J + \mu l \sin^2 x_2) = (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4$$

$$x_4' = \frac{(u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \quad (\text{A.10})$$

Dinamika *state* x_3 dapat diperoleh dari (A.3) sebagai berikut:

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_3' - x_4' l \cos x_2 + x_4'^2 l \sin x_2)$$

$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2 + \mu x_4' \cos x_2 \quad (\text{A.11})$$

Dengan mendefinisikan $a = l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)}$ dan melakukan substitusi

(A.10) ke (A.11), maka akan diperoleh persamaan (A.12)

$$(m_c + m_p)x_3' = u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2 + \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

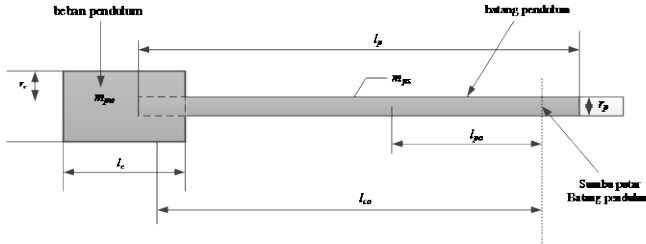
$$+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$\begin{aligned}
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l \sin^2 x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
(m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
x_3' &= \frac{(J + \mu l)l}{(m_c + m_p)l} \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \left(l^2 + \frac{J}{(m_c + m_p)} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&+ \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
x_3' &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (A.12)
\end{aligned}$$

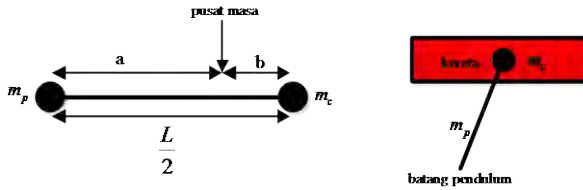
Dari (A.10) dan (A.12), dapat diperoleh bentuk persamaan *state* Sistem Pendulum-Kereta seperti pada (2.4).

Momen inersia dari Sistem Pendulum-Kereta diperoleh dari hasil analisis momen inersia yang diilustrasikan pada Gambar A.1. Dari gambar tersebut, m_{pw} adalah massa beban pendulum (kg), m_{ps} adalah massa batang pendulum (kg), l_p adalah panjang batang pendulum (m), l_{po} adalah jarak antara titik pusat massa batang pendulum dengan sumbu putar batang pendulum (m), l_c adalah panjang beban pendulum (m), l_{co} adalah jarak antara titik pusat massa beban pendulum dengan sumbu putar batang pendulum (m), r_p adalah jari-jari batang pendulum (m), dan

r_c adalah jari-jari beban pendulum (m). Momen inersia pendulum dari sumbu rotasi pendulum ditunjukkan oleh (A.13).



Gambar A.1 Ilustrasi Pendulum



Gambar A.2 Ilustrasi Momen Inersia Sistem Pendulum-Kereta

$$J_p' = m_{pw} \left(\frac{1}{12} l_c^2 + \frac{1}{4} r_c^2 + l_{co}^2 \right) + m_{ps} \left(\frac{1}{12} l_p^2 + \frac{1}{4} r_p^2 + l_{po}^2 \right) \quad (A.13)$$

Untuk kesederhanaan perhitungan, pendulum diasumsikan sebagai silinder dengan ketebalan yang seragam dan memiliki panjang L serta massa m_p . Posisi sumbu putar berada pada pusat massa kereta dan ujung batang pendulum sehingga kereta dapat dipandang sebagai titik massa M_c sedangkan pendulum sebagai titik massa M_p . Titik pusat massa sistem berada di dekat titik pusat massa seperti diilustrasikan pada Gambar A.2. Jika momen inersia dari sumbu tertentu terhadap titik pusat massa dinyatakan dengan J dan momen inersia dari sumbu yang paralel dengan sumbu sebelumnya dan dipisahkan oleh jarak sebesar d dinyatakan dengan J_p , maka hubungan antara J dan J_p adalah

$$J_p = J + Md^2 \quad (A.14)$$

Dari Gambar A.2, titik pusat massa sistem dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$m_p a = m_c b$$

$$a + b = \frac{L}{2} \quad (\text{A.15})$$

Oleh karena itu, dari (A.14) dan (A.15), diperoleh momen inersia sistem terhadap pusat massa, yaitu

$$J = m_p a^2 + m_c b^2 + \frac{m_p}{12} L^2 \quad (\text{A.16})$$

dengan:

$$a = \frac{L m_c}{2(m_p + m_c)} \text{ dan } b = \frac{L m_p}{2(m_p + m_c)}$$

Jika (A.16) dijabarkan akan didapat bentuk akhir persamaan momen inersia sistem seperti ditunjukkan pada (A.17).

$$J = \frac{L^2 m_p (4m_c + m_p)}{12(m_c + m_p)} \quad (\text{A.17})$$

Sedangkan jarak pusat massa sistem terhadap sumbu putar adalah

$$l = \frac{m_p L}{2(m_c + m_p)} \quad (\text{A.18})$$

A.2 Elemen Matriks Linearisasi Model Sistem Pendulum-Kereta

Dari persamaan (3.1), dapat diperoleh

$$f_1(x) = x_3$$

$$f_2(x) = x_4$$

$$f_3(x) = \frac{a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (\text{A.23})$$

$$f_4(x) = \frac{l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

dan

$$\begin{aligned}
 h_1(x) &= 0 \\
 h_2(x) &= 0 \\
 h_3(x) &= \frac{au}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 h_4(x) &= \frac{ul \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

sehingga elemen matriks A diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(x)_1}{\partial x_1} &= 0, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} = 1, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} = 0 \\
 \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} &= 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} = 1 \\
 \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} &= 0 \\
 \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} &= \frac{g\mu \cos^2 x_2 - a\mu x_4^2 \cos x_2 - l \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\
 &\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\
 \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} &= \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3} \\
 \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} &= \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - f_p l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} &= \frac{g\mu \cos x_2 - \mu x_4^2 \cos^2 x_2 - l \sin x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
&\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\
&\quad - \frac{2\mu l \cos x_2 \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\
\frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} &= \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3} \\
\frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} &= \frac{-2\mu l x_4 \cos x_2 \sin x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}
\end{aligned}$$

Sedangkan elemen matriks B adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1(x, u)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial h_2(x, u)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial h_3(x, u)}{\partial u} &= \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
\frac{\partial h_4(x, u)}{\partial u} &= \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan komponen $\frac{\partial T_c}{\partial x_3}$, maka (A.22) diubah menjadi sebagai berikut:

$$T_c(x_3) = \begin{cases} (Y_c - F_c) \frac{x_3}{x_c} - F_c & , x_3 < -x_c \\ (Y_c - F_s) \left[\left(\frac{x_3}{x_c} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_3}{x_c} \right) \right] - F_s & , -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ \frac{F_s x_3}{DZ_{cv'}} - DZ_{cv'} & , -DZ_{cv} \leq x_3 < 0 \\ 0 & , x_3 = 0 \\ \frac{F_s x_3}{DZ_{cv'}} - DZ_{cv'} & , 0 < x_3 \leq DZ_{cv} \\ (F_s - Y_c) \left[\left(\frac{x_3}{x_c} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_3}{x_c} \right) \right] + F_s & , DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ (Y_c - F_c) \frac{x_3}{x_c} + F_c & , x_c < x_3 \end{cases} \quad (A.25)$$

Dari(A.25),diperoleh komponen $\partial T_c / \partial x_3$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial T_c(x_3)}{\partial x_3} = \begin{cases} \frac{(Y_c - F_c)}{x_c} - F_c & , x_3 < -x_c \\ (Y_c - F_s) \left[\left(\frac{2x_3}{x_c^2} \right) + \frac{2}{x_c} \right] & , -x_c \leq x_3 < -DZ_{cv} \\ \frac{F_s}{DZ_{cv'}} & , -DZ_{cv} \leq x_3 < 0 \\ 0 & , x_3 = 0 \\ \frac{F_s}{DZ_{cv'}} & , 0 < x_3 \leq DZ_{cv} \\ (F_s - Y_c) \left[\left(\frac{2x_3}{x_c^2} \right) - \frac{2}{x_c} \right] & , DZ_{cv} < x_3 \leq x_c \\ \frac{(Y_c - F_c)}{x_c} & , x_c < x_3 \end{cases} \quad (A.26)$$

LAMPIRAN B

B.1 Program Perhitungan *Gain* Kontroler

```
% Start Program
clc
% Parameter Linearisasi
g=9.8;
Yc=2.381458;
FS=2.28133;
FC=2.53165;
J=0.0135735;
fp=0.000107433;
myu=0.020819972;
l=0.0167903;
a=0.01122828;
% *** Linierisasi sudut di 0 derajat *** %
[A1,B1,C1,D1]=linmod2('model_pendulum',[0 0 0 0]','0)
% ** Linierisasi sudut di 20 derajat ** %
[A2,B2,C2,D2]=linmod2('model_pendulum',[0 0.2 0
0]','0)

% Gain Kontroler LQR
disp('Program LQR untuk Mencari nilai Gain Optimal');
disp(' ');

%Hasil linearisasi pada saat 0 derajat
disp('Matriks Hasil Linearisasi 0 derajat');
A1=A1
B1=B1
%Hasil linearisasi pada saat 10 derajat
disp('Matriks Hasil Linearisasi 10 derajat');
A2=A2
B2=B2

% matriks Q dan R
disp('Kombinasi Matrix Q dan R');
Q=[5000 0 0 0;0 100 0 0;0 0 50 0;0 0 0 100]
R=0.7
% sinyal kontrol high
disp('Kombinasi Matrix Q dan R sinyal kontrol
high');
Q1=[5000 0 0 0;0 100 0 0;0 0 50 0;0 0 0 100]
R1=0.3
```

```

% sinyal kontrol low
disp('Kombinasi Matrix Q dan R sinyal kontrol low');
Q2=[5000 0 0 0;0 100 0 0;0 0 50 0;0 0 0 100]
R2=1

% Titik Kerja 0 derajat
disp('Titik Kerja 0 derajat');
disp('X2=0 dan u=high'); % if X2=0 and u=high
[K1,P11,E]=lqr(A1,B1,Q1,R1); % gain state
Feedback K11
K11=K1*-1 % u = -K

disp('X2=0 dan u=low'); % if X2=0 and u=low
[K2,P12,E]=lqr(A1,B1,Q2,R2); % gain state
feedback K12
K12=K2*-1 % u = -K

% Titik Kerja 20 derajat
disp('Titik Kerja 20 derajat');
disp('X2=pi/9 dan u=high'); % if X2=20 and
u=high
[K3,P21,E]=lqr(A2,B2,Q1,R1); % gain state
Feedback K21
K21=K3*-1 % u = -K

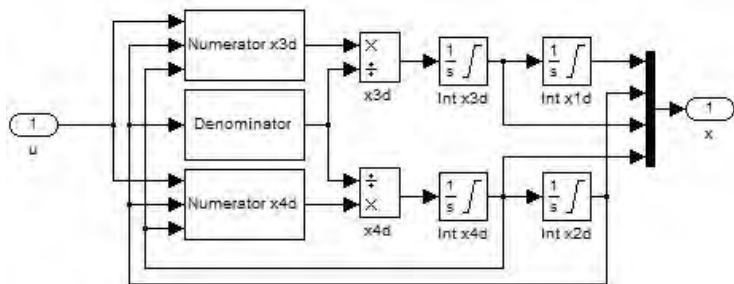
disp('X2=pi/9 dan u=low'); % if X2=20 and
u=low
[K4,P22,E]=lqr(A2,B2,Q2,R2); % gain state
Feedback K22
K22=K4*-1 % u = -K

disp('normal PDC');
disp('mencari gain K1');
[K5,P1,E]=lqr(A1,B1,Q,R); %gain state feedback
K1=K5*-1
disp('mencari gain K2');
[K6,P2,E]=lqr(A2,B2,Q,R); %gain state feedback
K2=K6*-1

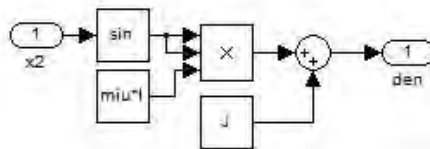
```

B.2 Blok Diagram Simulink

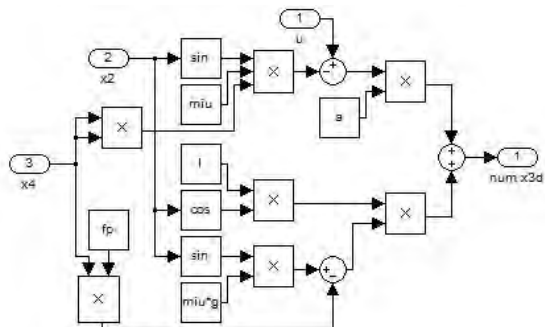
Blok *Pendulum-Cart System*



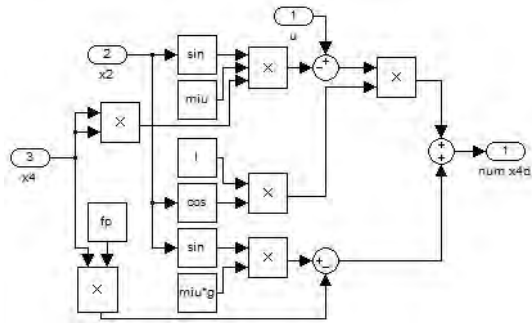
Blok *Denominator*



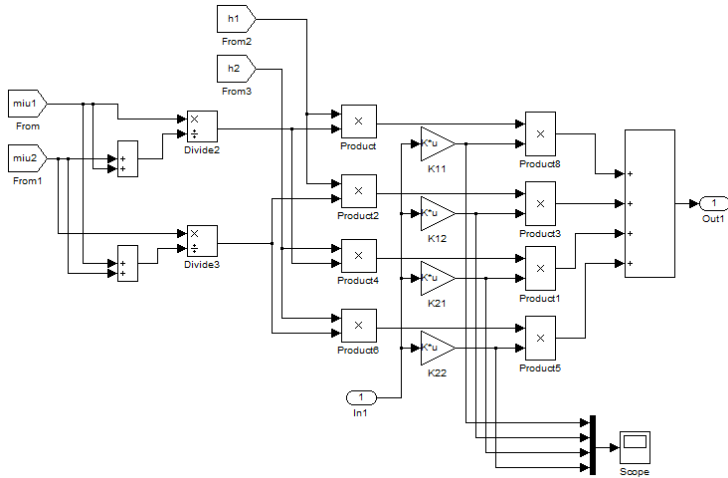
Blok *Numerator x3d*



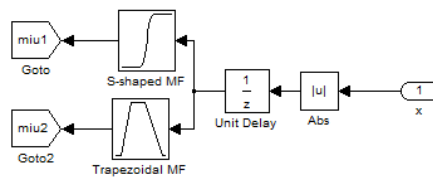
Blok Numerator x4d



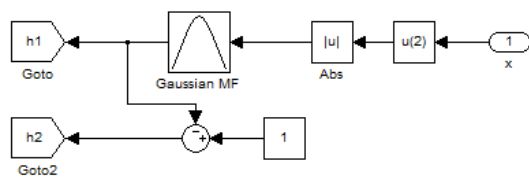
Blok Controller



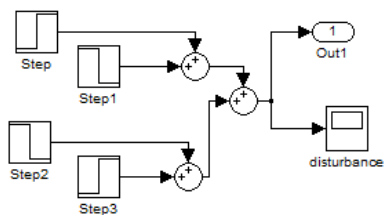
Blok MF Sinyal Kontrol



Blok *MF* Posisi Pendulum



Blok *Disturbance*



Halaman ini sengaja dikosongkan

DAFTAR PUSTAKA

- [1] H.O. Wang, K. Tanaka, M. Griffin, "Parallel Distributed Compensation on Nonlinear System by Takagi-Sugeno Fuzzy Model," *Proceeding of FUZZ-IEEE*, pp. 531-538, 1995
- [2] Ogata, K., "*Modern Control Engineering*", Prentice-Hall, New Jersey, Ch. 3, 1997.
- [3] Kamran Vafaei, and Behdad Geranmehr, "Controlling Inverted Pendulum Using Performance-Oriented PDC Method." *Journal of Automation and Control*, vol. 2, no. 2 (2014): 39-44. doi: 10.12691/automation-2-2-1
- [4] Pasino, K. M. dan Yurkovich, S., "*Fuzzy Control*", Addison Wesley Longman, California, 1998.
- [5] Reznik, L., "*Fuzzy Controllers*", Newnes, Oxford, 1997.
- [6] Naidu, D. S., "Optimal Control System", Idaho State University, Pacatello, Idaho, USA, 2002
- [7] M. Seidi, A.H.D. Markazi, "Performance-oriented Parallel Distributed Compensation", *J. Franklin Inst.* (2010).
- [8] Ogata, Katsuhiko, "*Modern Control Engineering*, 3rd ed", Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [9] Febriarianto, Tito, "Desain Kontrol Fuzzy Berbasis Performansi H_{∞} dengan Batasan *Input-Output* Untuk Sistem Pendulum Kereta"
- [10] Feedback Instruments Ltd., "*Digital Pendulum: Control in a MATLAB Environment*", England, 2004.

Halaman ini sengaja dikosongkan

RIWAYAT HIDUP



Syfa Almira lahir di Bogor pada tanggal 30 April 1991. Penulis merupakan anak pertama dari pasangan Ir. Achmad Hasan dan Lila Sukmala. Penulis menempuh jenjang pendidikan di TK Akbar, SD Bina Insani Bogor, SMPN 1 Bogor dan SMAN 3 Bogor. Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan studi diploma di Jurusan Teknik Elektro, Politeknik Negeri Jakarta dengan prodi Elektronika Industri. Setelah dinyatakan lulus pada tahun 2013 penulis melanjutkan studinya di Jurusan Teknik Elektro, Fakultas Teknik Elektro, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Pada Januari 2015, penulis mengikuti seminar dan ujian tugas akhir sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Teknik Elektro.

email : syfaalmira@ymail.com

Halaman ini sengaja dikosongkan